Cercle chargé

On considère un cercle chargé positivement, de charge linéique λ homogène, de rayon R, et d'axe $(\mathrm{O}z)$.

Exprimer le champ électrique sur l'axe $(\mathrm{O}z)$.

Correction

On se place en coordonnées cylindres $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$. Soit un point $\mathrm{M} = (0, 0, z)$ de l'axe $(\mathrm{O}z)$.

Tous les plans passant par la droite (OM) sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Donc $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = E(z)\,\overrightarrow{u}_z$$

Ici, le théorème de Gauss n'est pas privilégié car le degré de symétrie n'est pas suffisant. Il est donc nécessaire de faire le calcul direct via l'expression générale :

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{A}\in\ \text{cercle}} \frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\mathrm{AM}^3} \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{\mathrm{AM}} = -R\overrightarrow{u}_r + z\overrightarrow{u}_z$$

On sait qu'après calcul, le champ sera porté suivant $\overrightarrow{u}_z$. L'intégrale suivant $\overrightarrow{u}_r$ est donc nécessairement nulle.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{A}\in\ \text{cercle}} \frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\,\overrightarrow{u}_z$$

Or, la variable d'intégration $d\ell = R\,d\theta$ porte sur $\theta \in [0\,;2\pi]$. Donc tous les termes sont constants.

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\,\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\,\overrightarrow{u}_z}$$