

GUIDE D'ONDES RECTANGULAIRE

Une cavité vide, supposée invariante par translation selon \vec{u}_y et \vec{u}_z , est taillée dans un conducteur parfait occupant les demi-espaces $x < 0$ et $x > a$. On souhaite utiliser cette cavité comme guide d'onde : on s'intéresse à la propagation dans cette cavité d'une onde électromagnétique sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = f(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

1) En admettant que $\vec{E}(M, t) = \vec{0}$ pour $x = 0$ et $x = a$ (conséquence directe des relations de passage), déterminer $f(x)$ et la relation entre ω et k (on fera apparaître un entier n , appelé mode).

Correction

L'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

L'onde doit respecter les conditions aux limites en $x = 0$ et a , données par la nullité du champ à l'interface avec le conducteur, ce qui impose :

$$f(x = 0) = f(x = a) = 0$$

On injecte donc la forme d'onde recherchée dans l'équation de d'Alembert, et on obtient :

$$f''(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y - k^2 f(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y = \vec{0}$$

Ainsi :

$$f''(x) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) f(x) = 0$$

La nature des solutions de cette équation différentielle dépend du signe du coefficient $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$, qui doit être forcément positif : s'il était négatif (resp. nul), la solution serait une somme d'exponentielles (resp. une fonction affine), qui ne peut pas s'annuler deux fois. On a donc :

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \Rightarrow f(x) = A \cos(Kx) + B \sin(Kx)$$

La condition limite en $x = 0$ impose :

$$f(x = 0) = A = 0$$

La condition limite en $x = a$ impose :

$$f(x = a) = B \sin(Ka) = 0 \Rightarrow Ka = n\pi \Rightarrow K = \frac{n\pi}{a}$$

Enfin, en notant E_0 l'amplitude de l'onde électrique, on a donc :

$$f(x) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{avec : } n \in \mathbb{N}^*$$

La relation de dispersion dans le guide dépend donc de l'entier n et s'écrit

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad \text{avec : } n \in \mathbb{N}^*$$

2) Montrer que dans chaque mode la propagation est dispersive. Que devient la relation de dispersion lorsque dans un mode d'ordre n donné, lorsque la longueur d'onde $\lambda \ll a$? Commenter. Tracer l'allure des courbes $k = f(\omega)$ correspondant aux trois premiers modes propres.

Correction

La relation de dispersion s'écrit :

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

La relation $k = f(\omega)$ n'étant pas linéaire, la propagation est dispersive.

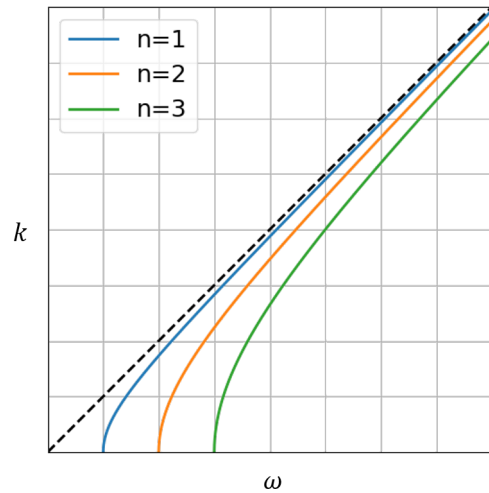
Si $\lambda \ll a$:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \gg \frac{2\pi}{a} \Rightarrow k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \simeq k^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{c} = k}$$

On retrouve la relation de dispersion dans le vide. C'est logique, un guide d'onde aux dimensions très grandes devant la longueur d'onde ne confine plus vraiment l'onde...

Graphe de :

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$



3) Montrer que dans chaque mode propre du guide, l'onde ne peut se propager que si sa pulsation ω est supérieure à une pulsation de coupure caractéristique de ce mode $\omega_{c,n}$ que l'on exprimera en fonction de n , c et a .

Correction

Pour que la relation de dispersion est une solution, il faut que :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \geq \omega_{c,n} = \frac{n\pi c}{a}$$

4) Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de chaque mode en fonction de c , ω et $\omega_{c,n}$ et tracer leur allure en fonction de ω pour une valeur de n donnée. Commenter.

Correction

La vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \left[1 - \left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2 \right]^{-1/2}$$

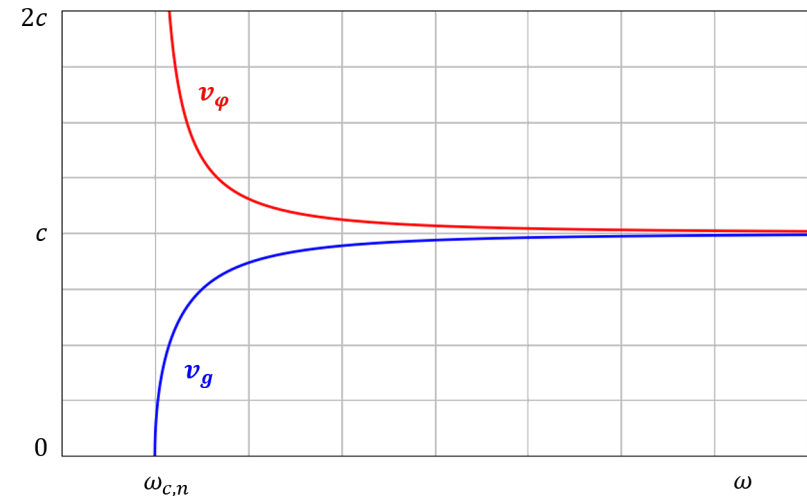
Grâce à la relation de dispersion, on obtient :

$$k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad 2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{\omega/k}$$

La vitesse de groupe vaut donc :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \left[1 - \left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2 \right]^{1/2}$$

Graphes :



La vitesse de phase est toujours supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide, mais ce n'est pas un problème car la phase ne transporte pas d'information ou d'énergie. La vitesse de groupe, elle, est toujours inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide et proche de la pulsation de coupure la vitesse de groupe tend vers 0.

On admet (découle directement de l'équation de Maxwell-Faraday) que le champ magnétique dans le guide s'écrit :

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{kE_0}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x + \frac{i n \pi E_0}{a \omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_z$$

5) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting instantané et interpréter physiquement chacune de ses composantes. Quelle est ainsi la nature de l'onde se propageant dans le guide. Justifier la terminologie utilisée de guide d'onde pour un tel dispositif.

Correction

Le calcul du vecteur de Poynting instantané (et non pas moyenné) impose de revenir

aux champs réels,

$$\vec{E} = \mathcal{R}e\left(\vec{\underline{E}}\right) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

et

$$\vec{B} = \mathcal{R}e\left(\vec{\underline{B}}\right) = -\frac{kE_0}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x - \frac{n\pi E_0}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z \\ &\quad - \frac{n\pi E_0^2}{a\omega\mu_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \vec{u}_x \end{aligned}$$

Après simplification du dernier terme, il vient :

$$\vec{\Pi} = \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z - \frac{n\pi E_0^2}{4a\omega\mu_0} \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \sin(2\omega t - 2kz) \vec{u}_x$$

Le premier terme, dirigé par \vec{u}_z , est de moyenne non nulle : il traduit physiquement le fait que l'onde transporte de l'énergie dans sa direction de propagation, ce qui est bien le but du guide d'onde. On constate par ailleurs que ce transport d'énergie est inhomogène au sein du guide, et en particulier nul sur les bords ($x = 0$ et a). Le second terme, porté par \vec{u}_x , est de moyenne nulle. Il traduit qualitativement des oscillations d'énergie d'un bord à l'autre du guide d'onde.

L'onde est transverse, polarisée linéairement suivant y , progressive suivant x , et stationnaire suivant z . On guide l'onde car la propagation est autorisée dans une direction mais pas dans les autres.