Validité du modèle classique de l'atome

On cherche à montrer que l'existence d'un rayonnement émis par une charge décrivant une orbite circulaire invalide le modèle classique de l'atome dans lequel un électron est en orbite circulaire stable autour du noyau, dans un état lié.

On considère l'atome d'hydrogène dans lequel un électron non relativiste, de charge $-e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C et de masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg, est en orbite circulaire de rayon initial $r_0 = 53 \times 10^{-12}$ m autour d'un proton supposé fixe au centre O du référentiel d'étude. Il est soumis de la part du proton à la force électrostatique, devant laquelle le poids est négligeable.

1) Montrer par un raisonnement qualitatif que le rayon de l'orbite de l'électron devrait se réduire jusqu'à effondrement de l'édifice.

Correction

L'électron en trajectoire circulaire subit une accélération centripète. On sait qu'une particule chargée en accélération émet du rayonnement. Ainsi, l'énergie de l'électron doit diminuer, et donc le rayon de l'orbite va nécessaire diminuer avec le temps. À terme, l'électron doit s'effondrer sur le noyau.

2) Évaluer l'énergie mécanique en eV, et la période de révolution de l'électron autour du proton.

Correction

L'énergie mécanique de l'électron vaut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

Or en vertu du principe fondamental de la dynamique pour une trajectoire circulaire uniforme :

$$m\vec{a} = -\frac{mv_0^2}{r_0}\vec{u}_r = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad mv_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} = -2{,}3 \times 10^{-18} \text{ J} = -13{,}6 \text{ eV}}$$

Et la période :

$$v_0^2 = \frac{e^2}{4\pi m\varepsilon_0 r_0} = \left(\frac{2\pi r_0}{T_0}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi m\varepsilon_0 r_0^3}{e^2}} = 1{,}3 \times 10^{-15} \text{ s}}$$

On rappelle que la puissance perdue par rayonnement par l'électron s'écrit :

$$\mathcal{P}_{ray} = \frac{\omega^4 e^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

avec ω la vitesse angulaire de l'électron et c la vitesse de la lumière.

3) Montrer que :

$$r^2\frac{dr}{dt} = -A$$

avec $A > 0$ une constante à déterminer. Pour la suite, on donne $A = 1{,}6 \times 10^{-21}$ m$^3\cdot$s^{-1}.

Correction

Le théorème de l'énergie mécanique (appliqué dans un référentiel galiléen) nous dit que :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -\mathcal{P}_{ray} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{\omega^4 e^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \quad \text{avec :} \quad \omega^2 = \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{e^2}{4\pi m\varepsilon_0 r^3}$$

On a donc :

$$\boxed{r^2\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi m\varepsilon_0}\right)^2}$$

4) Si, à $t = 0$, l'électron est sur sur une orbite de rayon r_0, exprimer puis calculer le temps τ pour que l'électron atteigne le noyau. Est-ce physiquement acceptable ?

Correction

On intègre cette équation :

$$r^2 dr = -A dt \quad \Rightarrow \quad \int_{r_0}^{0} r^2 dr = -A\int_0^{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{r_0^3}{3A} = 3{,}1 \times 10^{-11} \text{ s}}$$

Le noyau atomique n'est donc absolument pas stable : si l'on considère, pour se mettre dans la peau d'un physicien de l'époque, que l'univers, et les atomes dont est constituée la matière, a été créé il y a longtemps, les noyaux d'hydrogène (et sans doute, assez vite, les autres), se seraient détruits très rapidement, moins d'un milliardième de secondes après la création du monde. Ce modèle n'est donc pas réaliste.