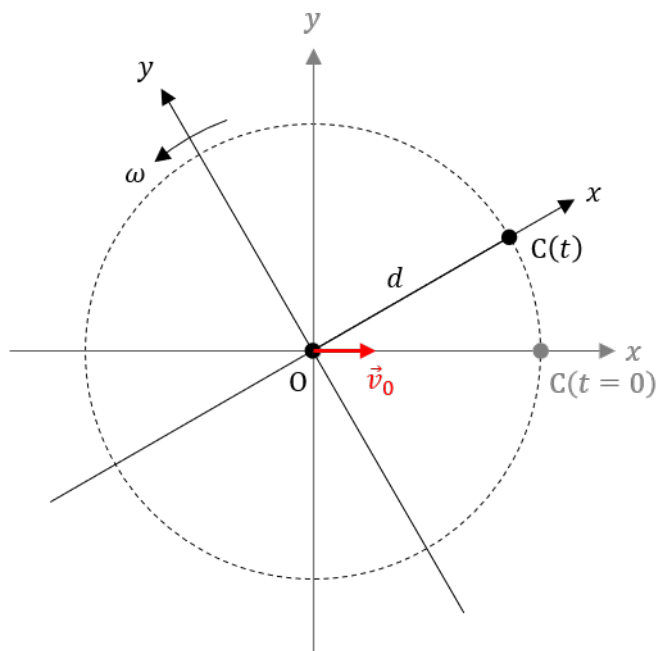


# EXPÉRIENCE DU MANÈGE INERTIEL

Si vous allez à la cité des Sciences, vous pourrez monter dans un manège inertiel. Lorsque l'on est entré, les portes se reforment et le manège (référentiel  $\mathcal{R}$ ) se met en mouvement par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen, selon un mouvement de rotation autour d'un axe vertical ( $Oz$ ), à la vitesse angulaire constante  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$  (avec  $\omega > 0$ ).

L'une des expériences consiste à se placer au centre  $O$  du manège et à essayer d'atteindre une cible  $C$  liée au manège tournant, située en face de soi à l'instant initial, à une distance  $d$  du centre, avec une balle en mousse. Le lancé est horizontal et le temps de l'expérience suffisamment court pour que l'on puisse négliger le poids de la balle. Le mouvement a donc lieu dans le plan horizontal ( $z = 0$ ).



On se place dans  $\mathcal{R}$  non galiléen. Dans ce référentiel, on repère la position de la balle en mousse  $M$  par ses coordonnées  $(x, y, z)$ . La position initiale vaut :  $(0, 0, 0)$ ; et la vitesse initiale vaut :  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ .

1) Établir les équations différentielles du mouvement.

**Correction**

Vitesse et accélération de la balle dans  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Bilan des forces : force d'inertie d'entraînement et force de Coriolis (le poids est négligé). Le PFD sur la balle donne :

$$m \vec{a} = m\omega^2 \vec{OM} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Ainsi,

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

On en déduit les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega \dot{y} \\ \ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

2) Montrer que :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos(\omega t) \\ y(t) = -v_0 t \sin(\omega t) \end{cases}$$

est la solution de ces équations.

**Correction**

Pour répondre à la question, il suffit d'injecter les solutions dans l'équation différentielle et vérifier que ça marche. On dérive pour avoir la vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos(\omega t) - v_0 \omega t \sin(\omega t) \\ \dot{y} = -v_0 \sin(\omega t) - v_0 \omega t \cos(\omega t) \end{cases}$$

Puis l'accélération :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2v_0\omega \sin(\omega t) - v_0\omega^2 t \cos(\omega t) \\ \ddot{y} = -2v_0\omega \cos(\omega t) + v_0\omega^2 t \sin(\omega t) \end{cases}$$

Et on remarque que l'on a bien :

$$\begin{cases} \omega^2 x + 2\omega \dot{y} = -2v_0\omega \sin(\omega t) - v_0\omega^2 t \cos(\omega t) = \ddot{x} \\ \omega^2 y - 2\omega \dot{x} = -2v_0\omega \cos(\omega t) + v_0\omega^2 t \sin(\omega t) = \ddot{y} \end{cases}$$

Remarque : méthode « classique » pour résoudre ce genre d'équation différentielle.

On pose :

$$u = x + iy \quad \text{avec : } i^2 = -1$$

Ainsi,

$$\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

Avec l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \omega^2 x + 2\omega \dot{y} + i(\omega^2 y - 2\omega \dot{x}) \\ &= \omega^2 (x + iy) - 2i\omega (\dot{x} + i\dot{y}) \\ &= \omega^2 u - 2i\omega \dot{u} \end{aligned}$$

On en déduit l'équation différentielle sur  $u$  :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2i\omega \frac{du}{dt} - \omega^2 u = 0$$

Polynôme caractéristique :

$$r^2 + 2i\omega r - \omega^2 = (r + i\omega)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -i\omega$$

Il existe une seule racine double. Donc la solution de l'ED s'écrit :

$$u(t) = (At + B)e^{-i\omega t} \quad \text{avec : } A, B \in \mathbb{C}$$

Avec les conditions initiales :

$$u(0) = 0 = B \quad \text{et} \quad \dot{u}(0) = v_0 = A$$

Ainsi :

$$u(t) = v_0 t e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = \operatorname{Re}(u) = v_0 t \cos(\omega t) \\ y(t) = \operatorname{Im}(u) = -v_0 t \sin(\omega t) \end{cases}$$

3) Déterminer le temps  $\tau$  mis par la balle pour s'éloigner d'une distance  $d$  de l'origine. Commenter.

**Correction**

Pour atteindre une distance  $d$  :

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = v_0 \tau \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = v_0 \tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{d}{v_0}}$$

On trouve la relation : vitesse = distance / temps, ce qui est très suspect... En réalité, si on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la balle ne subit aucune force. Elle se propage donc en ligne droite à vitesse constante. Elle parcourt donc bien une distance  $d$  en un temps  $\tau = \frac{d}{v_0}$  !

4) En déduire l'angle que doit faire le tireur avec l'axe  $(Ox)$  pour que la balle touche la cible.

**Correction**

Le point d'impact est (on pose  $t = \tau$ ) :

$$\begin{cases} x_i = d \cos\left(\frac{\omega d}{v_0}\right) \\ y_i = -d \sin\left(\frac{\omega d}{v_0}\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_i = d \cos(\alpha) \\ y_i = d \sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec : } \alpha = -\frac{\omega d}{v_0}$$

Il s'agit d'un point situé à une distance  $d$  du centre et faisant un angle  $\alpha = -\frac{\omega d}{v_0}$  avec l'axe  $(Ox)$ . Autrement dit, on a dévié d'un angle  $|\alpha|$  vers la droite. Pour atteindre la cible, il faut donc tirer avec un angle  $|\alpha|$  vers la gauche de l'axe  $(Ox)$ .