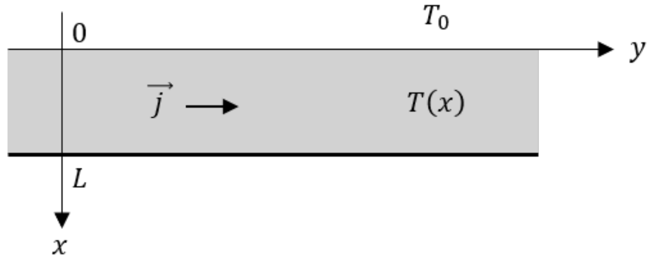
Diffusion thermique et courant électrique

Un matériau M qui se situe entre les plans $x = 0$ et $x = L$, de conductivité thermique λ et électrique σ, est parcouru par un courant électrique de densité volumique $\vec{j} = j\,\vec{u}_y$.

On note c la capacité thermique massique de M, et ρ sa masse volumique. Le plan $x = 0$ est maintenu à température uniforme T_0 tandis que le plan $x = L$ est calorifugé.



1) Déterminer la puissance volumique dissipée par effet Joule.

Correction

La puissance volumique s'écrit :

$$\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma} \quad \text{car :} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

2) Effectuer un bilan énergétique, sur une tranche de matériau de section S entre les abscisses x et $x + dx$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(x,t)$, puis l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$en régime permanent.

Correction

On applique le premier principe sur un tranche de matériau de longueur dx.

$$d^2H = \rho c S dx\big[T(x, t + dt) - T(x, t)\big] = \big[j_{th}(x, t) - j_{th}(x + dx, t)\big]S dt + \mathcal{P}_v S dx dt$$

Ainsi,

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \frac{j^2}{\sigma}$$

Avec la loi de Fourier :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{j^2}{\sigma}}$$

En régime stationnaire :

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{j^2}{\sigma \lambda}}$$

3) En déduire la répartition de température au sein du matériau.

Correction

On intègre deux fois pour obtenir la température. Les conditions aux limites à respecter sont :

$$T(x = 0) = T_0 \quad \text{et} \quad j_{th}(x = L) = 0$$

Ainsi,

$$j_{th}(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{j^2}{\sigma}(x - L) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(x) = \frac{j^2}{\sigma \lambda}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + T_0}$$

4) En $x = 0$, c'est en réalité un fluide qui s'écoule à la température T_0. Les échanges thermiques vérifient la loi de Newton avec un coefficient h. En déduire la répartition de température au sein du matériau (toujours en régime permanent).

Correction

La condition en $x = 0$ change :

$$j_{th}(x = 0) = h\Big[T_0 - T\big(x = 0^+\big)\Big]$$

On a donc :

$$j_{th}(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{j^2}{\sigma}(x - L) \quad \Rightarrow \quad T(x) = \frac{j^2}{\sigma \lambda}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + A$$

On en déduit, avec la CL :

$$-\frac{j^2 L}{\sigma} = h\,(T_0 - A) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{j^2 L}{\sigma h} + T_0$$

Bilan :

$$\boxed{T(x) = \frac{j^2}{\sigma\lambda}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{j^2 L}{\sigma h} + T_0}$$