Température à l'intérieur de la Terre

La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon $R_T = 6380$ km et de masse volumique $\rho = 2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, de conductivité thermique $\lambda = 4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ supposées uniformes. La température à l'intérieur de la Terre est une fonction de r que l'on nota $T(r)$. La température à la surface de la Terre est notée $T_s = 290$ K. On se place en régime permanent.

Dans cette modélisation, extrêmement simplifiée, on définit deux zones.

- Du centre de la Terre jusqu'à la lithosphère de rayon $R_L = 6280$ km, donc pour $0 \leq r \leq R_L$, on suppose qu'il n'y a aucune source de transfert thermique.
- Pour l'ensemble de la lithosphère, donc pour $R_L \leq r \leq R_T$, on tient compte de la source de chaleur que constitue la radioactivité d'éléments, essentiellement l'uranium. On notera $\mathcal{P} = 2 \times 10^{-10} \text{ W}\cdot\text{kg}^{-1}$ la puissance produite par unité de masse.

1) On considère une coquille sphérique d'épaisseur dr et de rayon interne r. À partir d'un bilan d'énergie dans cette coquille, montrer que l'équation de la diffusion thermique pour $0 \leq r \leq R_L$ s'écrit :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

Correction

On applique le premier principe en régime permanent.

$$d^2H = 0 = j_{th}(r) \times 4\pi r^2 dt - j_{th}(r+dr) \times 4\pi \left(r+dr\right)^2 dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r^2 \; j_{th}(r)\right) = 0$$

On trouve qu'en régime permanent le flux à travers toute sphère de rayon r est constant. Avec la loi de Fourier, on trouve bien l'expression demandée.

$$j_{th}(r) = -\lambda \, \frac{dT}{dr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0}$$

2) En déduire l'allure du profil de température $T(r)$. Conclure sur la pertinence du modèle employé.

Correction

On intègre deux fois :

$$r^2 \frac{dT}{dr} = A \quad \Rightarrow \quad T(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Mais $T(r)$ ne peut pas diverger en $r = 0$, donc $A = 0$. On en déduit que la température est constante, ce qui est impossible : un tel modèle n'est pas très satisfaisant.

3) En travaillant sur une enveloppe sphérique similaire à celle définie plus haut, mais pour $R_L \leq r \leq R_T$, faire un bilan d'énergie et en déduire une nouvelle équation de diffusion thermique.

Correction

On reprend le premier principe en ajoutant un terme de production de chaleur :

$$d^2H = 0 = j_{th}(r) \times 4\pi r^2 dt - j_{th}(r+dr) \times 4\pi \left(r+dr\right)^2 dt + \mathcal{P} dm dt$$

où dm représente la masse du système, c'est-à-dire de la coquille sphérique de rayon r et d'épaisseur dr :

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr$$

On en déduit :

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2 \; j_{th}(r)\right) + \mathcal{P}\rho r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = -\frac{\mathcal{P}\rho}{\lambda} \; r^2}$$

4) Déduire de l'équation précédente l'expression complète de la température $T(r)$ dans la lithosphère.

Correction

On intègre deux fois :

$$r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{\mathcal{P}\rho}{3\lambda} \; r^3 + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(r) = -\frac{\mathcal{P}\rho}{6\lambda} \; r^2 - \frac{C}{r} + D}$$

La continuité du flux thermique (cf. modèle précédent, $j_{th} = 0$) en $r = R_L$ implique :

$$0 = -\frac{\mathcal{P}\rho}{3\lambda} \; R_L^3 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\mathcal{P}\rho}{3\lambda} \; R_L^3$$

Et la température imposée en $r = R_T$ implique :

$$T_s = -\frac{\mathcal{P}\rho}{6\lambda} \; R_T^2 - \frac{\mathcal{P}\rho}{3\lambda R_T} \; R_L^3 + D \quad \Rightarrow \quad D = T_s + \frac{\mathcal{P}\rho}{6\lambda} \; R_T^2 + \frac{\mathcal{P}\rho}{3\lambda R_T} \; R_L^3$$

Bilan :

$$\boxed{T(r) = T_s + \frac{\mathcal{P}\rho}{6\lambda}\left(R_T^2 - r^2\right) + \frac{\mathcal{P}\rho}{3\lambda}\ R_L^3\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)}$$

5) Déduire de ce qui précède la température T_c au centre de la Terre, ainsi que le gradient de température à la surface de la Terre. Faire les applications numériques.

Correction

D'après le modèle, la température est constante pour $0 \leq r \leq R_L$, on en déduit donc :

$$\boxed{T_c = T_s + \frac{\mathcal{P}\rho}{6\lambda}\left(R_T^2 - R_L^2\right) + \frac{\mathcal{P}\rho}{3\lambda}\ R_L^3\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_L}\right) = 74 \times 10^3\ \mathrm{K}}$$

Le gradient de température à la surface de la Terre vaut :

$$\boxed{\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R_T} = \frac{\mathcal{P}\rho}{3\lambda R_T^2}\left(R_L^3 - R_T^3\right) = -3{,}45 \times 10^{-2}\ \mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$$