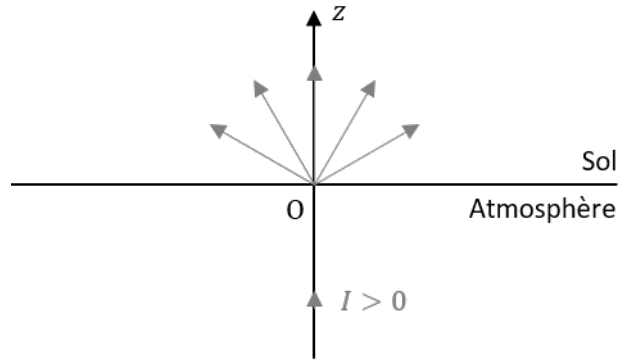


# PARATONNERRE

Un paratonnerre est assimilé à la portion  $z < 0$  de la droite  $(Oz)$  et la Terre est assimilée au demi-espace  $z > 0$  supposé conducteur de conductivité  $\gamma$ . Le schéma est volontairement représenté « à l'envers » afin de simplifier les calculs ultérieurs.



On suppose que le paratonnerre est parcouru par un courant d'intensité constante  $I$  comptée positivement dans le sens des  $z$  croissants. On repère un point de la terre par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$  et on suppose que le vecteur densité de courant dans le sol est de la forme :

$$\vec{j} = j(r) \vec{u}_r$$

1) Montrer que :  $\vec{B}(M) = B_\varphi(r, \theta) \vec{u}_\varphi$ .

**Correction**

La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe  $(Oz)$ . Donc  $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta)$ .

Le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc  $\vec{B}$  est orthogonal à ce plan. Ainsi :

$$\vec{B}(M) = B(r, \theta) \vec{u}_\varphi$$

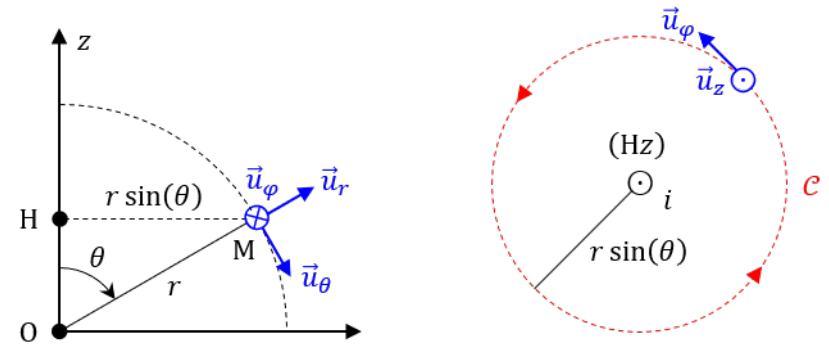
2) Déterminer  $B_\varphi(r, \theta)$  dans le domaine  $z < 0$ .

**Correction**

On applique le théorème d'Ampère sur un cercle d'axe  $(Oz)$ , situé à une distance  $r$  du point  $O$  donc de rayon  $r \sin(\theta)$  (**attention à la définition des**

**coordonnées sphériques !**), et orienté de sorte que  $d\vec{\ell} = r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$ .

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$$



Puisque l'intégrale porte sur la variable  $\varphi$ , le champ  $\vec{B}(r, \theta)$  est constant et peut sortir de l'intégrale. Ainsi :

$$B \times 2\pi r \sin(\theta) = \mu_0 I \Rightarrow B(r, \theta, z < 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r \sin(\theta)}$$

3) Déterminer  $j(r)$  en fonction de  $I$  et  $r$ .

**Correction**

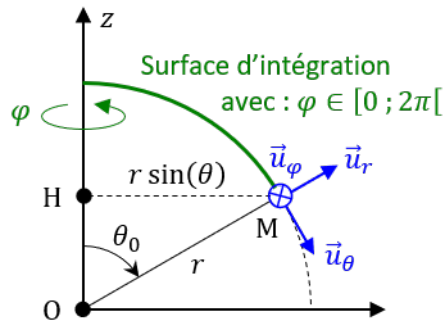
On intègre le vecteur densité volumique de courant sur une demi-sphère de rayon  $r$ .

$$I = \iint_{1/2 \text{ sphère}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(r) \times 2\pi r^2 \Rightarrow j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$$

4) Calculer le flux de  $\vec{j}$  à travers le cercle  $\mathcal{C}$  d'axe  $(Oz)$  passant par un point  $M$  du domaine  $z > 0$  orienté dans le sens trigonométrique autour de  $(Oz)$ . Ce cercle est vu sous l'angle  $\theta_0$  depuis le point  $O$ .

**Correction**

On peut calculer le flux de  $\vec{j}$  à travers n'importe quelle surface qui s'appuie sur le concours  $\mathcal{C}$  demandé. On choisit comme surface la portion de sphère de passant par  $M$  et d'angle  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ .



On a donc :

$$I_C = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta_0} j(r) \times r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = 2\pi r^2 j(r) [1 - \cos(\theta_0)]$$

Avec ce qui précède, on en déduit :

$$I_C = I [1 - \cos(\theta_0)]$$

C'est prévisible, puisque tous les plans qui contiennent l'axe (Oz) sont des plans de symétrie, donc  $\vec{B}$  doit être orthogonal à l'ensemble de ces plans. Seul le vecteur l'est.

5) Déterminer  $B_\varphi(r, \theta)$  dans le domaine  $z > 0$ . Que se passe-t-il sur l'axe (Oz) ? Pouvait-on le prévoir ?

**Correction**

On applique le théorème de théorème d'Ampère sur  $C$ . De même que précédemment, l'intégrale porte sur la variable  $\varphi$ , donc le champ  $\vec{B}(r, \theta)$  est constant et peut sortir de l'intégrale. Ainsi :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow B \times 2\pi r \sin(\theta) = \mu_0 \times I_C(\theta)$$

Finalement,

$$B(r, \theta, z > 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Sur l'axe (Oz), ie.  $\theta = 0$ , on trouve à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 que :

$$\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \simeq \frac{1 - (1 - \theta^2/2)}{\theta} = \frac{\theta}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow B(r, 0, z > 0) = 0$$