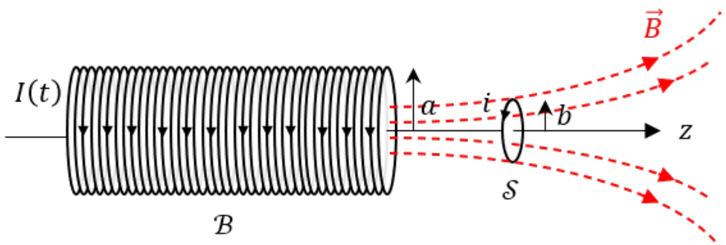
Interaction spire-solénoïde

La figure ci-dessous représente un solénoïde circulaire $\mathcal{B}$ de rayon a. Une spire circulaire $\mathcal{S}$ de rayon $b \ll a$ est placée sur l'axe du solénoïde. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ ont même axe (Oz) et sont parcourus par des courants respectifs I et i.



1) Justifier qu'on cherche un champ créé par le solénoïde de la forme :

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = B_r(r,z)\,\overrightarrow{u_r} + B_z(r,z)\,\overrightarrow{u_z}$$

Correction

On se place en coordonnées cylindres $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$. Soit un point $\mathrm{M} = (r, \theta, z)$ quelconque de l'espace.

La distribution de courant est invariante par par rotation autour de (Oz). Donc le champ magnétique l'est également.

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{B}(r,z)$$

Le plan $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Donc $\overrightarrow{B}(\mathrm{M})$ appartient à ce plan.

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = B_r(r,z)\,\overrightarrow{u_r} + B_z(r,z)\,\overrightarrow{u_z}}$$

2) En faisant un bilan de flux magnétique sur un petit cylindre de rayon r, compris entre z et $z + dz$, montrer qu'en un point proche de l'axe :

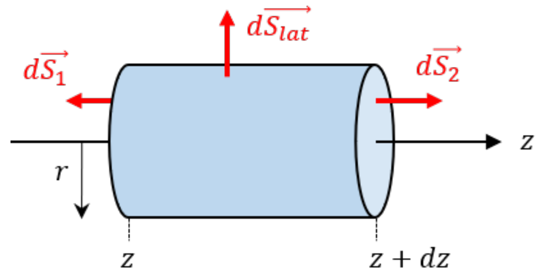
$$B_r = -\frac{r}{2}\,\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

expression dans laquelle on confondra $\dfrac{\partial B_z}{\partial z}$ avec la dérivée calculée le long de l'axe :

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z(r=0,z)}{\partial z}$$

Correction

On divise la surface du cylindre en 3 surface : S_1, S_2 et S_ℓ.



Le flux du champ magnétique à travers n'importe qu'elle surface fermée étant toujours nul, on a :

$$0 = \oiint \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{\mathrm{M}\,\in\,S_1} \overrightarrow{B}(\mathrm{M})\cdot \underbrace{d\overrightarrow{S_1}}_{\propto\,-\overrightarrow{u_z}} + \iint_{\mathrm{M}\,\in\,S_2} \overrightarrow{B}(\mathrm{M})\cdot \underbrace{d\overrightarrow{S_2}}_{\propto\,\overrightarrow{u_z}} + \iint_{\mathrm{M}\,\in\,S_\ell} \overrightarrow{B}(\mathrm{M})\cdot \underbrace{d\overrightarrow{S_\ell}}_{\propto\,\overrightarrow{u_r}}$$

On en déduit :

$$0 = \iint_{S_1} -B_z(r,z)\,dS_1 + \iint_{S_2} B_z(r,z+dz)\,dS_2 + \iint_{S_\ell} B_r(r,z)\,dS_\ell$$

On suppose r très petit, ce qui permet d'assimiler r à 0 dans les deux premières intégrales.

$$0 \simeq \iint_{S_1} -B_z(r=0,z)\,dS_1 + \iint_{S_2} B_z(r=0,z+dz)\,dS_2 + \iint_{S_\ell} B_r(r,z)\,dS_\ell$$

Dans chaque intégrale, le champ est donc constant pour la variable d'intégration et peu donc sortir de l'intégrale.

$$\begin{aligned} 0 &= -B_z(r=0,z)\ \pi r^2 + B_z(r=0,z+dz)\ \pi r^2 + B_r(r,z)\ 2\pi r dz \\ &= \frac{\partial B_z(r=0,z)}{\partial z}\ \pi r^2 dz + B_r(r,z)\ 2\pi r dz \end{aligned}$$

On en déduit bien la forme demandée :

$$\boxed{B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\,\frac{\partial B_z(r=0,z)}{\partial z}}$$

3) Une force s'exerce sur la spire. Préciser le nom de la force, la direction de la force et la composante du champ magnétique qui l'engendre par un raisonnement qualitatif.

Correction

C'est la force de Laplace.

$$d\overrightarrow{F} = i\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B} \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{d\ell} = bd\theta\overrightarrow{u_\theta} \quad \Rightarrow \quad d\overrightarrow{F} = ibd\theta\Big[-B_r\overrightarrow{u_z} + B_z\overrightarrow{u_r}\Big]$$

La composante de la force selon $\overrightarrow{u_r}$ sera nulle après intégration sur toute la spire. La force résultante est donc selon $\overrightarrow{u_z}$.

4) Calculer la force exercée sur la spire et la mettre sous la forme $F = \mu\,\dfrac{dB}{dz}$ où μ désigne le moment magnétique de $\mathcal{S}$.

Correction

Calculons l'intégrale de la force élémentaire de Laplace sur toute la spire de rayon b.

$$\overrightarrow{F} = \int -ib\;B_r(r=b,z)\,d\theta\;\overrightarrow{u_z} = -2\pi ib\;B_r(r=b,z)\,\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi, toujours en négligeant le rayon de la spire et en utilisant le résultat de la question précédente.

$$\overrightarrow{F} = \pi b^2 i\,\frac{\partial B_z}{\partial z}\overrightarrow{u_z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \pi b^2 i}$$

5) Retrouver le résultat en considérant que la force dérive de l'énergie potentielle d'interaction entre le champ créé par le solénoïde et la spire assimilée à un dipôle.

Correction

On rappelle l'énergie potentielle d'interaction entre un moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}$.

$$\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{\mu}\cdot\overrightarrow{B} = -\pi b^2 i\overrightarrow{u_z}\cdot\overrightarrow{B} = -\pi b^2 iB_z$$

On en déduit la force :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{\partial\mathcal{E}_p}{\partial z}\,\overrightarrow{u_z} = \pi b^2 i\,\frac{\partial B_z}{\partial z}\overrightarrow{u_z}}$$