Résistance en géométrie sphérique

On considère deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2, portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 sont séparés par un milieu conducteur. On désire exprimer la résistance électrique équivalente et l'énergie électrique dissipée. On néglige tout effet de bord.

1) En notant I l'intensité du courant circulant entre les cylindres de façon radiale, et en supposant qu'on est en régime stationnaire, exprimer la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}(r)$ en fonction de I.

Correction

Le courant traversant une sphère de rayon r vaut :

$$I = \iint \overrightarrow{j}(r) \cdot \overrightarrow{dS}$$

avec : $\overrightarrow{j}(r) = j(r)\,\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{dS} = dS\ \overrightarrow{u_r}$. L'intégrale porte sur les variables θ et φ, donc $j(r)$ est constant. Ainsi,

$$I = j(r) \times S = j(r) \times 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{j}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\ \overrightarrow{u_r}}$$

2) En déduire l'expression du champ électrique en tout point.

Correction

Avec la loi d'Ohm locale :

$$\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{E} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2}\ \overrightarrow{u_r}}$$

3) En déduire l'expression de la résistance électrique R.

Correction

La différence de potentielle vaut :

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} dV = \int_{R_1}^{R_2} \overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) \cdot d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\int_{R_1}^{R_2} \overrightarrow{E} \cdot dr\overrightarrow{u_r}$$

car : $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$.

Ainsi,

$$V_1 - V_2 = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

4) Calculer la puissance dissipée par effet Joule de deux manières différentes :

- à l'aide de la loi d'Ohm macroscopique ;
- à l'aide de la loi d'Ohm locale.

Correction

Avec la loi d'Ohm macroscopique :

$$\boxed{\mathcal{P} = RI^2 = \frac{I^2}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

Avec la loi d'Ohm locale. La puissance volumique vaut :

$$\mathcal{P}_{vol} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{j^2}{\gamma} = \left(\frac{I}{4\pi r^2}\right)^2 \frac{1}{\gamma}$$

On intègre sur tout le conducteur pour en déduire la puissance :

$$\boxed{\mathcal{P} = \iiint \mathcal{P}_{vol}\ dV = \int \mathcal{P}_{vol} \times 4\pi r^2 dr = \frac{I^2}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

5) En admettant que l'épaisseur $e = R_2 - R_1$ est très faible devant chacun des rayons, proposer une expression simplifiée pour l'expression de la résistance. Commenter.

Correction

En posant $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$, on a :

$$\boxed{R = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1}\left[1 + \frac{e}{R_1}\right]^{-1}\right) = \frac{e}{4\pi R_1^2 \gamma}}$$

On retrouve l'expression de la résistance en cartésien (d'un pavé droit) :

$$R = \frac{L}{\gamma S} \quad \text{avec :} \quad L = e \quad \text{et} \quad S = 4\pi R_1^2$$

où e est l'épaisseur et $4\pi R_1^2$ la surface de la sphère intérieure.