Décharge d'une sphère conductrice dans l'air

Un sphère conductrice, de centre O et de rayon R, porte initialement la charge Q_0 uniformément répartie en surface. Elle est abandonnée dans l'air qui est légèrement conducteur, de conductivité γ. À l'instant t, la boule porte la charge $Q(t)$.

1) Déterminer le champ électromagnétique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M}, t)$ à l'extérieur de la sphère en fonction de $Q(t)$.

Correction

La distribution de charge est invariante par rotation des angles θ et φ. Donc : $\overrightarrow{E}(r, t)$. Tous les plans passant par O et M sont des plans de symétrie. Donc $\overrightarrow{E}$ appartient à l'ensemble de ces plans :

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}, t) = E(r, t)\ \overrightarrow{u_r}$$

On applique le théorème de Gauss sur une sphère de rayon $r > R$.

$$\oiint \overrightarrow{E}(r, t) \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r, t) = \frac{Q(t)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M}, t) = \frac{Q(t)}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \overrightarrow{u_r}}$$

2) Par des arguments de symétrie, montrer que $\overrightarrow{B}(\mathrm{M}, t) = \overrightarrow{0}$.

Correction

Le champ électrique génère une distribution de courant $\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$. Tous les plans passant par O et M sont donc des plans de symétrie de la distribution de courant. Donc $\overrightarrow{B}$ est orthogonal à l'ensemble de ces plans. Seul de vecteur nul l'est.

3) Établir l'équation différentielle vérifiée par $Q(t)$. La résoudre. Commenter.

Correction

On utilise l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{E}}{\tau} = \overrightarrow{0} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\tau} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}}$$

La solution est :

$$\boxed{Q(t) = Q_0\ e^{-t/\tau}}$$

La sphère se décharge entièrement dans le temps.

4) Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu.

Correction

L'énergie totale dissipée dans le milieu est égale à l'énergie initiale du champ électrique(car toute l'énergie se dissipe).

$$\mathcal{E} = \iiint \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r, 0)\ dV = \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\right)^2 \times 4\pi r^2 dr = \boxed{\frac{Q_0^2}{8\pi R \varepsilon_0}}$$

L'énergie totale dissipée dans le milieu est aussi égale à l'intégrale (sur l'espace et dans le temps) de la puissance Joule volumique.

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{P}\ dt \quad \text{avec :} \quad \mathcal{P} = \iiint \mathcal{P}_{vol}\ dV = \int_R^\infty \mathcal{P}_{vol} \times 4\pi r^2 dr$$

avec :

$$\mathcal{P}_{vol} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} = \gamma E^2 = \gamma \left(\frac{Q_0\ e^{-t/\tau}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\right)^2$$

Le calcul donne bien le même résultat :

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{Q_0^2}{8\pi R \varepsilon_0}}$$