Dipôle rayonnant

Considérons un dipôle formé d'une charge positive $q > 0$ fixe située en O, centre d'un repère, et d'une charge $-q$ située en N de coordonnées cartésiennes $(0, 0, a\cos(\omega t))$.

Ce modèle permet, en première approximation, de rendre compte du comportement et de l'allure du champ électromagnétique rayonné par un atome ou une molécule excité par un champ électrique harmonique.

On admet que la charge oscillante créée un champ électromagnétique donné, en coordonnées sphériques, par :

$$\vec{E}(\mathrm{M}, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi r}\, \ddot{p}(t - r/c)\, \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(\mathrm{M}, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi r c}\, \ddot{p}(t - r/c)\, \vec{u}_\varphi$$

avec : $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\, \vec{u}_z$ le moment dipolaire du dipôle. On pose $k = \omega/c$.

Données :

$$\int_0^\pi \sin^3(\theta)\, d\theta = \frac{4}{3}$$

1) Exprimer p_0 en fonction de a et q.

Correction

Par définition d'un moment dipolaire :

$$\vec{p}(t) = q\, \overrightarrow{\mathrm{NO}} = -qa \cos(\omega t)\, \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_0 = -qa}$$

2) Préciser les hypothèses nécessaires pour obtenir les expressions des champs électriques et magnétiques en dégageant leur signification physique.

Correction

On a supposé que $a \ll \lambda \ll r$.

Approximation dipolaire : $a \ll r$. Même approximation que lors du dipôle électrostatique. On veut connaître la nature du rayonnement loin du dipôle.

ARQS des sources $\Leftrightarrow$ **Particules non relativistes** : $a \ll \lambda$. On suppose que la taille de la molécule est petite comparée à la longueur d'onde qu'elle va produire. $\Leftrightarrow$ Le temps de propagation des champs au sein du système est négligeable face au temps de variation caractéristique des champs. $\Leftrightarrow$ La vitesse d'oscillation des charges est très faible devant la vitesse de la lumière.

Champ lointain : $\lambda \ll r$. Aussi appelée « zone de rayonnement ». L'observateur est placé suffisamment loin des sources de sorte qu'il soit nécessaire de tenir compte de la durée de propagation de l'OEM émise par le dipôle.

3) Montrer que le champ électromagnétique présente une structure d'onde plane locale.

Correction

L'onde a localement une structure d'onde plane. En effet :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

Mais cette structure est seulement locale car les surfaces d'onde ne sont pas des plans.

4) Justifier que les dépendance et orientations des champs sont cohérentes avec la distribution de charge et de courant du problème.

Correction

Invariance par rotation par rapport à l'axe $(\mathrm{O}z)$, donc les champs ne dépendent pas de φ.

Le plan $(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des sources (charge et courant). Donc $\vec{E}$ appartient à ce plan et $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan. Enfin, l'approximation dipolaire impose un déplacement de l'énergie selon $\vec{u}_r$, il est donc normal d'avoir $\vec{E}$ selon $\vec{u}_\theta$ uniquement (sous cette approximation).

La dérivée seconde de $p(t)$ apparaît dans les expressions. Or, $\vec{p}(t) = -q\, \overrightarrow{\mathrm{ON}}$. Les charges doivent nécessairement être accélérées pour émettre un rayonnement.

Le terme $\ddot{p}(t - r/c)$ signifie que le champ reçu à l'instant t est issu de l'accélération des charges à l'instant $t - r/c$. Il faut bien tenir compte du temps de propagation des OEM.

L'amplitude des champs électrique et magnétique décroît en $1/r$ est une conséquence de la conservation de l'énergie.

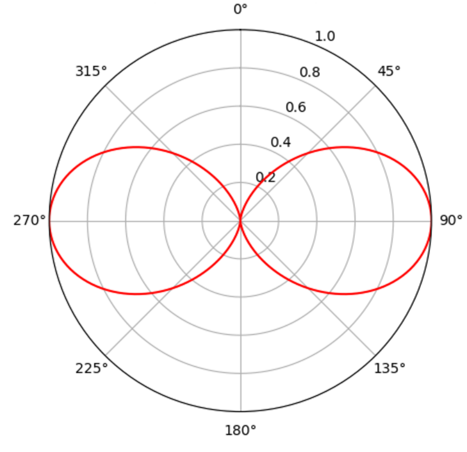
5) Déterminer le vecteur de Poynting moyen. Tracer l'allure du diagramme de rayonnement (ou indicatrice de rayonnement). Le dipôle rayonne-t-il pareillement dans toutes les directions ?

Correction

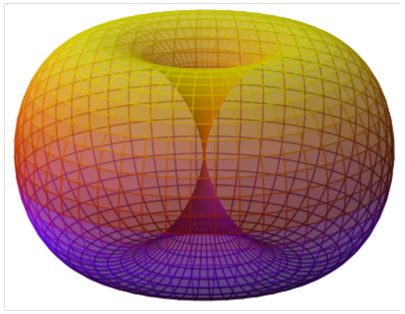
Le vecteur de Poynting associé au champ rayonné est :

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{\sin(\theta)}{4\pi r c}\, \ddot{p}(t - r/c)\right]^2 \vec{u}_r}$$

Le vecteur de Poynting est radial et toujours dirigé vers l'extérieur : des charges oscillantes rayonnement toujours de l'énergie vers l'extérieur du système.



Vue en 2D dans le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$



Vue en 3D

6) Calculer la puissance moyenne totale rayonnée par le dipôle à travers une sphère de rayon r centrée sur le dipôle. Comment interprétez-vous ce résultat ?

Correction

Calculons la puissance moyenne traversant une sphère de rayon r.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{ray} &= \iint \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} \\
&= \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0}{c} \left[\frac{\sin(\theta)}{4\pi r c}\ \ddot{p}(t-r/c)\right]^2 \overrightarrow{u_r} \cdot r^2\ \sin(\theta)\, d\theta d\varphi \overrightarrow{u_r} \\
&= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\ \ddot{p}^2(t-r/c) \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3(\theta)\, d\theta}_{=\ 4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=\ 2\pi} \\
&= \boxed{\frac{\mu_0}{6\pi c}\ \ddot{p}^2(t-r/c)}
\end{aligned}$$

Cette puissance ne dépend pas de la taille de la sphère choisie. Donc l'énergie totale se conserve au cours de la propagation (cohérent car le milieu est non absorbant). Ce résultat justifie le terme en $1/r$ de l'amplitude des champs.