Sphère chargée

On considère une sphère de rayon R de densité volumique de charge ρ uniforme.

1) Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace.

Correction

On se place en coordonnées sphériques $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$. Soit un point $\mathrm{M} = (r, \theta, \varphi)$ quelconque de l'espace.

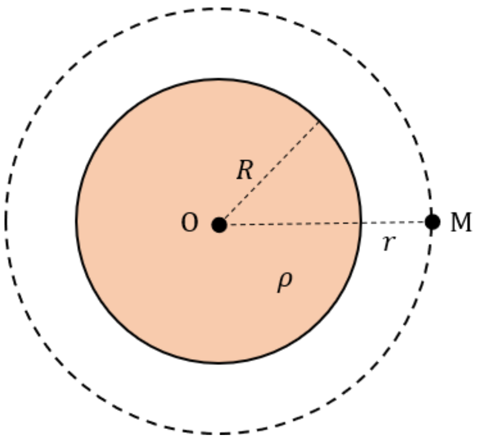
La distribution de charge est invariante par rotation selon les angles θ et φ. Donc le champ électrique l'est également.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{E}(r)$$

Le plans $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge (en réalité, tous les plans qui contiennent la droite (OM) sont des plans de symétrie). Donc $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = E(r)\,\overrightarrow{u_r}$$

On prend comme surface de Gauss une sphère de centre O de rayon r. Ainsi, $\overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{u_r}$.



Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

On distingue alors les cas où $r \leq R$ et $r \geq R$.

$$Q_{int}(r \leq R) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \text{et} \quad Q_{int}(r \geq R) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_r} & \text{si : } r \leq R \\ \dfrac{\rho R^3}{3 r^2 \varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_r} & \text{si : } r \geq R \end{cases}}$$

2) Montrer qu'à l'extérieur de la sphère, le champ $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$ est équivalent au champ créé par une charge Q ponctuelle placée en O. Exprimer Q en fonction de ρ et R.

Correction

Le théorème de Gauss sur une charge ponctuelle Q donne (même raisonnement que la question précédente) :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M}) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_r}}$$

Il s'agit du même raisonnement qu'à la question 1 dans le cas où $r \geq R$ où Q représente la charge totale de la distribution.

$$\boxed{Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}$$

Autrement, à l'extérieur de la sphère, tout se passe comme si la sphère était ponctuelle de charge égale à la charge totale de la sphère.

3) Que peut-on en déduire pour le champ gravitationnel $\overrightarrow{g}(\mathrm{M})$ créé par une planète à symétrie sphérique ?

Correction

Par analogie avec la gravitation, on en déduit que le champ gravitationnel créé par un astre sphérique en dehors de ce dernier est identique à celui créé par un point matériel de masse égale à la masse totale de l'astre. Ce qui est bien pratique pour les exercices de mécanique...