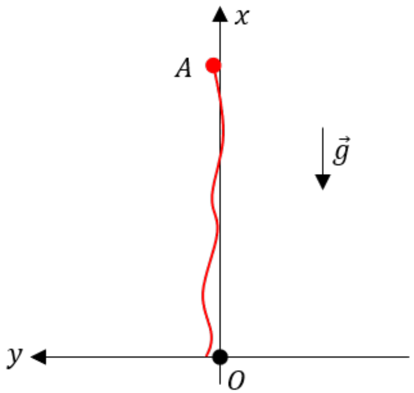
Vibrations d’une corde verticale

Une corde, infiniment souple, de masse linéique μ, de longueur L est suspendue au point A dans le champ de pesanteur d’intensité g. Lorsque la corde est au repos, son extrémité inférieure coïncide avec le point O. Son point d’accrochage Aeffectue des oscillations horizontales :

$$y_A(t) = a\ \cos(\omega t)$$

d’amplitude $a \ll L$. L’extrémité inférieure de la corde ne subit aucune contrainte. Le déplacement (quasi-horizontal) d’un point $P(x)$ de la corde par rapport à sa position d’équilibre est noté $y(x, y)$.



Dans toute la suite, on suppose que y, $\partial y/\partial x$ et $\partial^2 y/\partial x^2$ sont des infiniments petits d’ordre 1 et que le déplacement de la corde ne se produit que dans la direction y.

1) Montrer que la tension de la corde dépend de x et déterminer l’expression de $T(x)$.

2) En déduire que l’équation de propagation des ondes le long de la corde est :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\left(\frac{\partial y}{\partial x} + x\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

On cherche une solution de l’équation ci-dessus sous la forme :

$$y(x, y) = \alpha(x)\ \cos(\omega t) + \beta(x)\ \sin(\omega t)$$

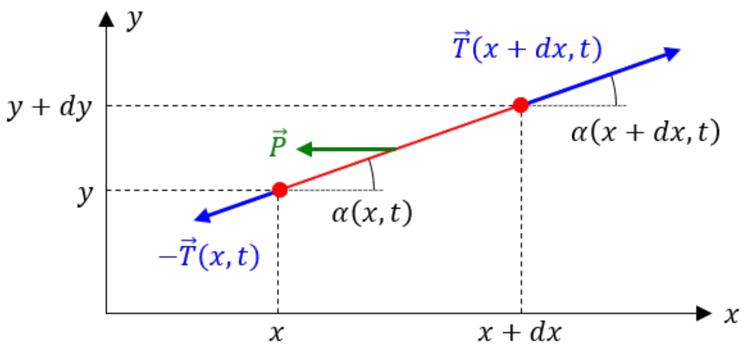
3) Montrer que $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ vérifient la même équation différentielle.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) J'oriente le schéma de la même manière que dans le cours pour plus de confort !



On suppose que les oscillations sont purement horizontales, donc :

$$\vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t}\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y$$

PFD sur la corde :

$$\mu dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) - \mu g\,dx\,\vec{u}_x$$

Ainsi,

$$\boxed{\mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} - \mu g\,\vec{u}_x}$$

De plus, en projetant la tension de la corde sur les deux axes et en faisant un développement limité à l'ordre 1 en α :

$$\vec{T}(x,t) = T(x,t)\left[\cos(\alpha(x,t))\,\vec{u}_x + \sin(\alpha(x,t))\,\vec{u}_y\right] \simeq T(x,t)\left[\vec{u}_x + \alpha(x,t)\,\vec{u}_y\right]$$

On projette le PFD sur l'axe (Ox) :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\vec{T}(x,t)\cdot\vec{u}_x\right] - \mu g = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial T}{\partial x} = \mu g \quad\Rightarrow\quad T(x) = \mu g x + cte$$

Or, en $x=0$, l'extrémité de la corde est libre donc la tension est nulle. On en déduit

$$\boxed{T(x) = \mu g x}$$

2) On projette le PFD sur l'axe (Oy).

$$\mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu g\frac{\partial x\alpha}{\partial x} = \mu g\left(\alpha + x\,\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)$$

Or, toujours à l'ordre 1 :

$$\tan(\alpha) \simeq \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\left(\frac{\partial y}{\partial x} + x\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}$$

3) On injecte la solution dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} &-\frac{\omega^2}{g}\left[\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\right] \\ =\; &\left[\alpha'\cos(\omega t) + \beta'\sin(\omega t)\right] + x\left[\alpha''\cos(\omega t) + \beta''\sin(\omega t)\right] \end{aligned}$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x\,\alpha'' + \alpha' + \dfrac{\omega^2}{g}\,\alpha \\ x\,\beta'' + \beta' + \dfrac{\omega^2}{g}\,\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation doit être vraie pour tout t, donc en particulier pour $\omega t = 0$ et $\omega t = \pi/2$, ce qui assure que :

$$\boxed{x\,\alpha'' + \alpha' + \frac{\omega^2}{g}\,\alpha = 0 \quad \text{et} \quad x\,\beta'' + \beta' + \frac{\omega^2}{g}\,\beta = 0}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com