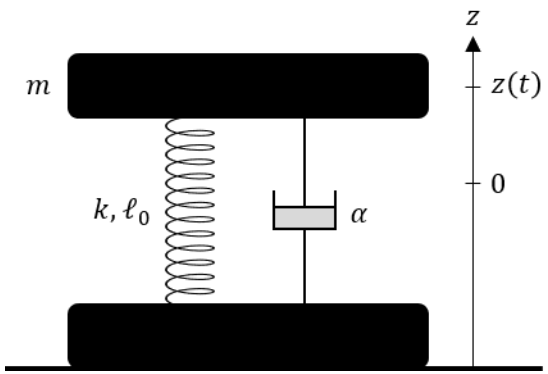
Vibrations d'un moteur

Lorsqu'un moteur de type compresseur fonctionne, il est nécessaire de prévoir un système de suspension pour amoindrir les vibrations du châssis. Le moteur est assimilé à un point matériel de masse m. La suspension peut être modélisé par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse du moteur et α une constante positive.



On s'intéresse au mouvement vertical du moteur dans un référentiel galiléen, repéré par un axe (Oz) ascendant.

1) Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile. Déterminer la longueur ℓ_{eq} du ressort. La position du moteur dans ce cas est prise comme origine de l'axe (Oz).

2) Lorsque le moteur fonctionne, tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire de la forme $\overrightarrow{F} = F_0 \cos(\omega t) \overrightarrow{u_z}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par z, lorsque le moteur fonctionne.

3) En régime forcé, on recherche des solutions de la forme $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$. On note : $\underline{V}(t) = \underline{V_m}\, e^{i\omega t}$. Exprimer $\underline{V_m}$ sous la forme :

$$\underline{V_m} = \frac{V_0}{1 + iQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Donner l'expression de V_0, Q et ω_0 en fonction de F_0, m, α et k.

4) On définit la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_m}}{V_0}$$

Étudier puis tracer le diagramme de Bode de cette fonction de transfert.

Correction

Correction

1) On applique le PFD à l'équilibre sur la masse m.

$$0 = -mg - k\left(\ell_{eq} - \ell_0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

2) On applique le PFD sur la masse m.

$$m\ddot{z} = -mg - k\left(\ell - \ell_0\right) - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t) \quad \text{avec :} \quad \ell = \ell_{eq} + z$$

Ainsi, avec la question 1), on a :

$$\boxed{m\ddot{z} = -kz - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t)}$$

3) On passe en notation complexe :

$$\left(\frac{i\omega m}{\alpha} + 1 + \frac{k}{i\omega\alpha}\right)\underline{V_m} = \frac{F_0}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{V_m} = \frac{F_0/\alpha}{1 + i\left(\dfrac{\omega m}{\alpha} - \dfrac{k}{\omega\alpha}\right)}}$$

On identifie donc :

$$\boxed{V_0 = \frac{F_0}{\alpha}} \qquad \frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{\alpha} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{k}{\alpha}$$

On découple les deux dernières équations (faire le produit et le rapport des deux) pour obtenir :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

4) Prenons $Q = 20$ pour les AN.

Limite BF :

$$\underline{H}(i\omega) \sim \frac{1}{-iQ\dfrac{\omega_0}{\omega}} \quad \Rightarrow \quad G_{dB} \sim 20\log\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)$$

Il s'agit d'une pente de $+20$ dB/dec.

Limite HF :

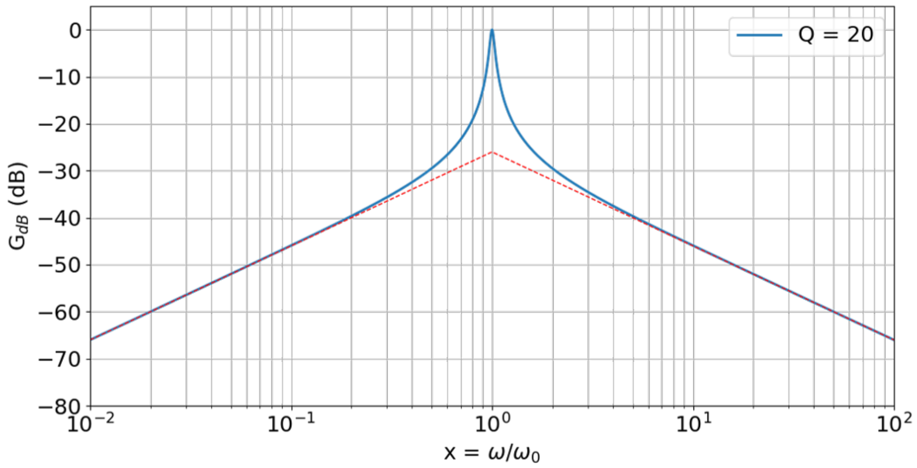
$$\underline{H}(i\omega) \sim \frac{1}{iQ\dfrac{\omega}{\omega_0}} \quad \Rightarrow \quad G_{dB} \sim 20\log\left(\frac{\omega_0}{Q\omega}\right)$$

Il s'agit d'une pente de -20 dB/dec.

Les deux asymptotes se croisent en $\omega = \omega_0$ et $G_{dB} = -20\log(Q) = -26$.

Le gain réel vaut, pour $\omega = \omega_0$, $G_{dB} = 0$.

On obtient donc le graphe ci-dessous.



Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com