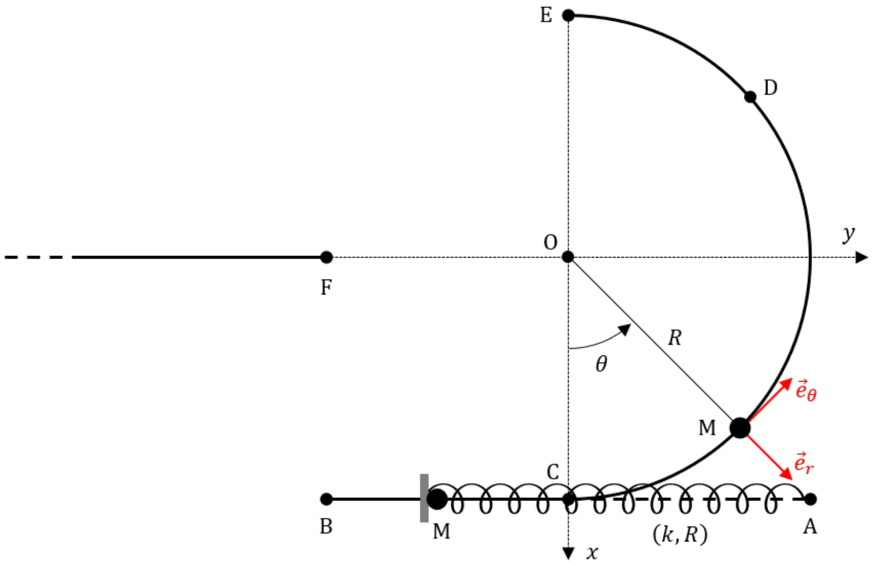
Un jeu d'enfant

On considère le jeu d'enfant suivant.



Une bille (point M de masse m supposée ponctuelle) circule sur une piste $BCEF$. Cette piste est constituée : d'une partie rectiligne BC de longueur R, d'un demi-cercle CE de rayon R et de centre O, et d'une seconde partie rectiligne commençant au point F (situé au dessus du point B, à gauche du point O).

Un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide R, relié d'un côté à un point fixe A (distance $CA = R$) et de l'autre à une plaque mobile.

Un enfant tire la plaque jusqu'au point B et place la bille M contre la plaque. Il lâche la plaque sans vitesse initiale, le ressort se contracte alors, propulsant la bille. La contact entre la bille et la plaque est rompu au point C : la bille s'engage dans la piste circulaire et le ressort est arrêté par une cale non représentée sur le schéma.

On néglige dans l'exercice toute source de dissipation d'énergie. Tous les résultats sont à exprimer en fonction de k, R, m et g.

1) Déterminer l'expression de la vitesse v_C de la bille au point C.

On étudie le mouvement dans la piste circulaire.

2) Déterminer, à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique de la bille, une relation reliant ω (vitesse angulaire) et θ.

3) En déduire l'expression de la réaction normale de la piste en fonction de θ.

4) Déterminer l'angle θ_D du point D, point où la bille quitte le guide. En déduire une condition portant sur k pour que le point matériel parvienne au sommet E de la piste. On note k_0 le cas limite.

On suppose la suite que $k = k_0$. On étudie le mouvement après la point E.

5) Déterminer l'équation du mouvement lorsque de la chute libre.

6) Le jouet peut-il tomber entre F et O ? On suppose de plus qu'il conserve après l'atterrissage sur le plan horizontal la composante horizontale du vecteur vitesse qu'il avait à l'instant de l'atterrissage. Déterminer l'expression de sa vitesse sur le plan horizontal en fonction, entre autres, de v_0.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) On utilise la conservation de l'énergie mécanique entre B et C.

$$\frac{1}{2}k\left(2R-R\right)^2+0=0+\frac{1}{2}mv_c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_c=\sqrt{\frac{kR^2}{m}}}$$

2) Vitesse : $\overrightarrow{v}=R\omega\overrightarrow{e}_\theta$.
Énergie potentielle de pesanteur : $\mathcal{E}_p=-mgx=-mgR\cos(\theta)$.
On utilise la conservation de l'énergie mécanique entre C et M quelconque.

$$\frac{1}{2}mv_c^2-mgR=\frac{1}{2}mR^2\omega^2-mgR\cos(\theta)$$

Ainsi,

$$\boxed{mR\omega^2=kR+2mg\left(\cos(\theta)-1\right)}$$

3) On a :
- Poids : $\overrightarrow{P}=mg\overrightarrow{e}_x=mg\left(\cos(\theta)\overrightarrow{e}_r-\sin(\theta)\overrightarrow{e}_\theta\right)$
- Réaction normale du support : $\overrightarrow{N}=-N\overrightarrow{e}_r$
- Accélération : $\overrightarrow{a}=R\dot{\omega}\overrightarrow{e}_r-R\omega^2\overrightarrow{e}_\theta$

On applique le PFD que l'on projette sur $\overrightarrow{e}_r$.

$$-mR\omega^2=-N+mg\cos(\theta)$$

Avec la question précédente, on en déduit :

$$\boxed{N=kR+mg\left(3\cos(\theta)-2\right)}$$

4) Au point D, la réaction normale du support s'annule.

$$0=kR+mg\left(3\cos(\theta_D)-2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\theta_D)=\frac{2}{3}-\frac{kR}{3mg}}$$

Pour que la point D coïncide avec le point E, il faut que $\theta_D=\pi$.

$$-1=\frac{2}{3}-\frac{k_0R}{3mg} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_0=\frac{5mg}{R}}$$

Pour atteindre le point E, il faut donc que $\boxed{k>k_0}$.

5) La vitesse au point E vaut, dans ce cas limite :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}mv_{C,0}^2-mgR=\frac{1}{2}mv_{E,0}^2+mgR \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{2}k_0R^2-mgR=\frac{1}{2}mv_{E,0}^2+mgR \\
\Rightarrow\ & \frac{5mgR}{2}-mgR=\frac{1}{2}mv_{E,0}^2+mgR \\
\Rightarrow\ & \boxed{v_{E,0}=\sqrt{gR}}
\end{aligned}$$

La bille n'est soumise qu'à sont poids durant la chute libre. On pose $t=0$ le temps où $M=E$. Les conditions initiales de la chute sont :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= R\overrightarrow{e}_r=-R\overrightarrow{e}_x \\
\overrightarrow{v} &= \sqrt{gR}\,\overrightarrow{e}_\theta=-\sqrt{gR}\,\overrightarrow{e}_y
\end{aligned}$$

Le PFD donne :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\ddot{x} &=& g \\ \ddot{y} &=& 0\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} &=& gt \\ \dot{y} &=& -\sqrt{gR}\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{lcl}x &=& \dfrac{gt^2}{2}-R \\ y &=& -\sqrt{gR}\,t\end{array}\right.}$$

6) Lorsque $x=0$:

$$t=\sqrt{\frac{2R}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=-R\sqrt{2}<-R}$$

Dans le cas limite, la bille tombe au-delà du point F. Donc même si $k>k_0$, la bille tombera toujours sur la piste.

Puisque la bille conserve sa vitesse horizontale, $\boxed{v=-\sqrt{gR}}$ après atterrissage.

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com