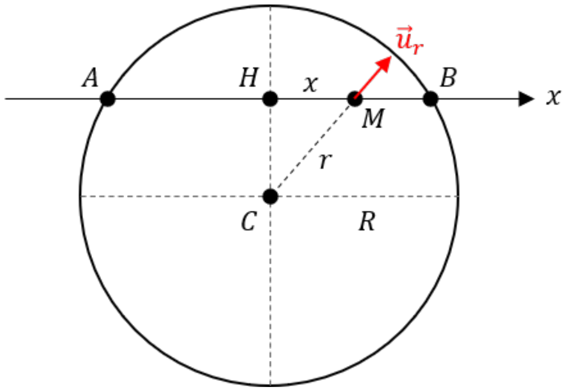
Tunnel terrestre

On admet que pour tout point M de masse m situé à l'intérieur de la Terre (de rayon R) à la distance r du centre C de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la terre et de valeur (en coordonnées sphériques) :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{mgr}{R}\overrightarrow{u_r}$$

On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe (Hx) ne passant pas par C et traversant la Terre. On note d la distance CH du tunnel au centre de la Terre. Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part de A sans vitesse initiale.

On prendra le point H comme origine de l'axe (Hx).



<u>Données</u> : $R = 6,4 \cdot 10^6$ m, $d = 5 \cdot 10^6$ m et $g = 9,81$ m·s^{-2}.

1) Déterminer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$ (en fonction de la variable x) de M, en choisissant la constante d'intégration de sorte que $\mathcal{E}_p(0) = 0$.

2) Tracer $\mathcal{E}_p(x)$.

3) Quelle est la vitesse maximale atteinte par M au cours du mouvement ?

4) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. La résoudre.

5) Déterminer le temps mis pour aller de A vers B.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) On rappelle le lien entre force et énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_p = \frac{mg}{2R}\,r^2 + cte$$

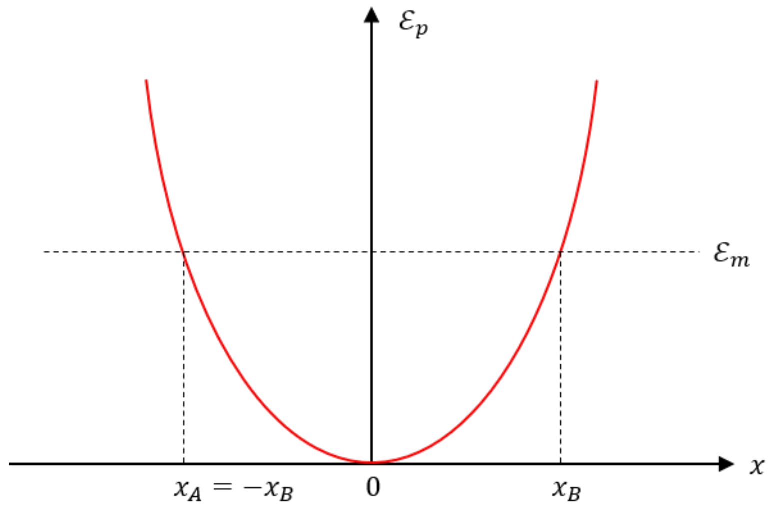
Or, d'après le théorème de Pythagore,

$$r^2 = x^2 + d^2$$

Enfin, on choisit la constante pour que $\mathcal{E}_p(0) = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{E}_p(x) = \frac{mg}{2R}\,x^2}$$

2) Il s'agit d'une parabole.



3) La vitesse est maximale lorsque l'énergie potentielle est minimale, donc au point H d'abscisse $x = 0$.
D'après le théorème de Pythagore dans CHB,

$$R^2 = x_B^2 + d^2 \quad \text{et} \quad x_B = -x_A$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique entre A et H :

$$\mathcal{E}_m = cte = \frac{mg}{2R}\,x_A^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{g}{R}\,(R^2 - d^2)} = 5\ \text{km·s}^{-1}}$$

4) On applique le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{x}\ddot{x} + \frac{mg}{R}x\dot{x} = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}}$$

Solution générale :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Les conditions initiales impose :

$$x(0) = A = x_A = -\sqrt{R^2 - d^2}$$

et

$$v(0) = B\omega_0 = 0$$

Donc :

$$\boxed{x(t) = -\sqrt{R^2 - d^2}\,\cos(\omega_0 t)}$$

5) Le temps pour aller de A à B est égal à une demi-période du mouvement.

$$\boxed{t_{AB} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = 42\ \text{min}}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com