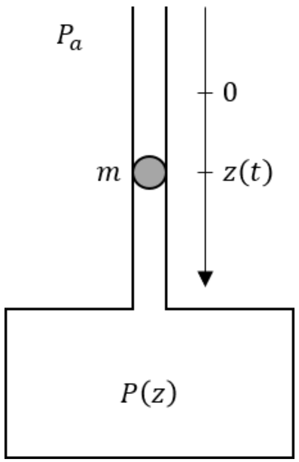
Tube de Rüchardt

Un gaz parfait est enfermé dans un ballon dont le col est un tube de section S dans lequel se trouve une bille de masse m. On suppose que la bille joue le rôle d'un piston étanche qu'on modélisera comme un cylindre de section S, et on négligera les frottements de la bille sur le tube. On note P_a la pression atmosphérique et V_0 le volume total de gaz à l'équilibre. Le ballon est considéré comme calorifugé. On suppose que la dynamique du système est suffisamment lente pour que l'on puisse considérer l'évolution du gaz comme réversible.

On choisira un axe vertical descendant (Oz) et on notera $P(z)$ la pression dans le ballon quand la bille est à la côte z et P_e la pression dans le ballon à l'équilibre. L'origine de l'axe (Oz) est confondue avec la position d'équilibre ($z_e = 0$).



1) Déterminer la pression P_e à l'intérieur du ballon lorsque la bille est à l'équilibre.

2) Exprimer $P(z)$ en fonction de P_e, γ, V_0, S et z.

3) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la bille en fonction des constantes de l'exercice.

4) Montrer que dans l'hypothèse où la section du tube est suffisamment faible pour que le volume balayé par la bille au cours de son mouvement soit négligeable devant le volume du ballon, le mouvement de la bille est sinusoïdal.

5) Montrer alors que la mesure d'une durée caractéristique du mouvement de la bille permet de déterminer le coefficient γ du gaz, et préciser la relation correspondante.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) On applique un PFD sur la bille à l'équilibre.

$$0 = mg + P_a S - P_e S \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_e = P_a + \frac{mg}{S}}$$

2) La transformation est une compression adiabatique réversible d'un gaz parfait. On peu donc appliquer la loi de Laplace, entre l'état d'équilibre et un état quelconque.

$$P_e V_0^\gamma = P(z)\, V^\gamma(z) \quad \text{avec :} \quad V(z) = V_0 - Sz$$

Ainsi,

$$\boxed{P(z) = P_e \left(\frac{V_0}{V_0 - Sz}\right)^\gamma = P_e \left(1 - \frac{Sz}{V_0}\right)^{-\gamma}}$$

3) On applique le PFD hors équilibre :

$$m\ddot{z} = mg + P_a S - P(z)\, S = P_e S - P_e S \left(1 - \frac{Sz}{V_0}\right)^{-\gamma}$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{z} = \frac{P_e S}{m}\left[1 - \left(1 - \frac{Sz}{V_0}\right)^{-\gamma}\right]}$$

4) On rappelle que :

$$(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$$

On fait un développement limité au premier ordre de l'équation différentielle :

$$\ddot{z} \simeq \frac{P_e S}{m}\left[1 - \left(1 + \frac{\gamma S z}{V_0}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{z} + \omega_0^2\, z = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_e S^2}{m V_0}}}$$

On a bien une équation différentielle d'oscillateur harmonique, dont la solution est sinusoïdale.

5) On en déduit γ à l'aide de la mesure d'une période T d'oscillation.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\gamma P_e S^2}{m V_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{4\pi^2 m V_0}{P_e S^2 T^2}}$$