

## Trajectoire des planètes

---

Dans cet exercice, nous allons étudier les trajectoires possibles en mécanique céleste, lorsque deux corps sont en interaction gravitationnelle, l'un étant beaucoup plus massif que le deuxième.

On admet que la trajectoire est plane. Le corps le plus massif est supposé immobile à l'origine  $O$  du repère. Le corps le moins massif, noté  $M$ , est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  ou polaires  $(r, \theta)$ . Les deux corps sont supposés ponctuels.

On admet que les lois de la mécanique permettent de montrer que :

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos(\theta)}$$

avec  $r_0 > 0$  une constante et  $e \geq 0$  un paramètre appelé excentricité de la trajectoire.

- 1) Déterminer l'expression du vecteur vitesse  $\vec{v}$  dans la base polaire.
  - 2) En admettant que l'accélération est purement radiale, montrer que la quantité  $r^2\omega$  est une constante du mouvement (avec  $\omega = \dot{\theta}$ ).
  - 3) On se place dans le cas où  $e = 0$ . Déterminer la nature de la trajectoire et la représenter.
- On se place dans le cas où  $0 < e < 1$ . On admet qu la trajectoire est une ellipse de demi grand axe noté  $a$ .
- 4) Tracer l'allure de la trajectoire (prendre le cas où  $e = 0.5$ ).
  - 5) Déterminer l'expression de  $a$  en fonction de  $r_0$  et  $e$ .
  - 6) Déterminer les points de l'orbite où le vecteur vitesse est orthogonal au vecteur position.
  - 7) Rappeler les expressions de  $x$  et  $y$  en fonction de  $r$  et  $\theta$ .
  - 8) En déduire que la trajectoire est une parabole d'équation  $x(y)$  que l'on déterminera.
  - 9) Tracer l'allure de la trajectoire.
  - 10) On se place dans le cas où  $e > 1$ . Déterminer le domaine radial accessible par  $M$ , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre  $\theta$  au cours de la trajectoire. Tracer alors l'allure de la trajectoire dans le cas où  $e = 3$ .



Correction

## Correction

1) On a :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\omega \vec{u}_\theta = \frac{r_0 e \omega \sin(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} \vec{u}_r + \frac{r_0 \omega}{1 + e \cos(\theta)} \vec{u}_\theta$$

2) L'accélération vaut :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}) \vec{u}_\theta$$

Puisque l'accélération radiale est nulle, on a :

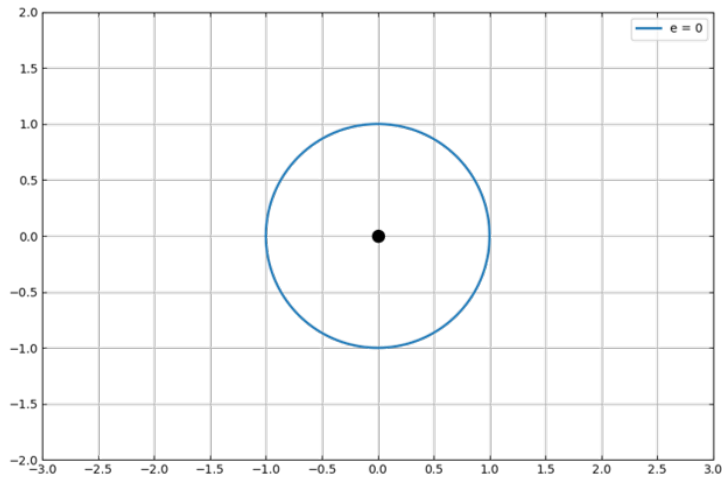
$$2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = 0$$

Or,

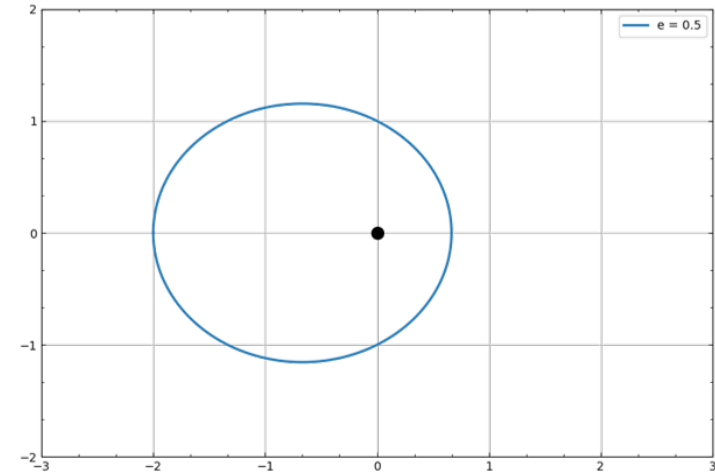
$$\frac{d}{dt}(r^2\omega) = r(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}) = 0$$

La quantité  $r^2\omega$  est bien constante.

3) Lorsque  $e = 0$ ,  $r = r_0$ . Le rayon est constant, il s'agit donc d'un mouvement circulaire. Ce mouvement est uniforme d'après la question précédente ( $\omega = cte$ ).



4) Graphe :



5) Par définition du grand-axe :

$$2a = \frac{r_0}{1+e} + \frac{r_0}{1-e} = \frac{2r_0}{(1+e)(1-e)} \Rightarrow \boxed{a = \frac{r_0}{1-e^2}}$$

6) D'après la question 1), il s'agit du cas où  $\sin(\theta) = 0$ , donc pour  $\theta = 0$  et  $\pi$ .

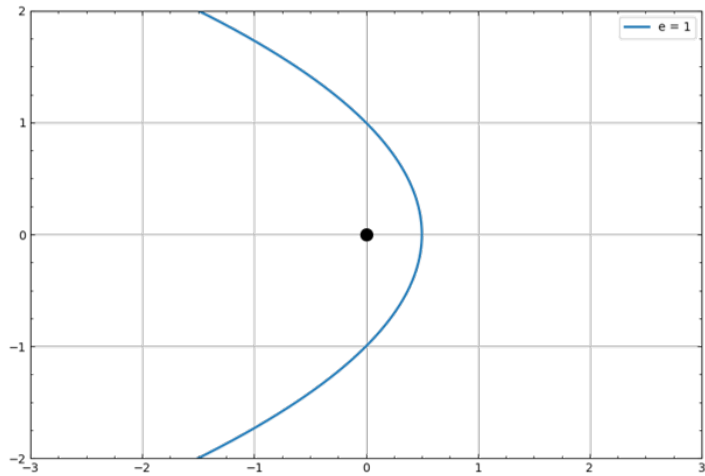
7) On a :

$$\boxed{x = r \cos(\theta)} \quad \text{et} \quad \boxed{y = r \sin(\theta)}$$

8) On a :

$$\begin{aligned} r = \frac{r_0}{1 + \cos(\theta)} &\Rightarrow r + r \cos(\theta) = r_0 \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = r_0 \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r_0 - x \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2 + x^2 - 2r_0x \\ &\Rightarrow \boxed{x = -\frac{y^2}{2r_0} + \frac{r_0}{2}} \end{aligned}$$

9) Graphe :



10) Par définition d'une distance, on a nécessairement  $e > 0$ . Ainsi,

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos(\theta)} > 0 \Rightarrow 1 + e \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \cos(\theta) > -\frac{1}{e}$$

On introduit :

$$\theta_\ell = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$$

Alors :  $\theta \in [-\theta_\ell; \theta_\ell]$

Pour  $e = 3$ , on a  $\theta_\ell = 109^\circ$ . On en déduit le graphe ci-dessous, où les asymptotes font des angles de  $\pm\theta_\ell$  avec l'horizontale.

