Taille critique d'une bactérie

Une bactérie est modélisée par une sphère fixe, de rayon R, et sa masse volumique μ est assimilée à celle de l'eau. Le régime est considéré comme stationnaire et on note $n(r)$ la densité de dioxygène dissous à la distance r du centre de la bactérie. La diffusion du dioxygène dans l'eau obéit à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D. À grande distance de la bactérie, la densité de dioxygène dissous est notée n_0 et est supposée constante.

On admet que la consommation en oxygéné de la bactérie est proportionnelle à sa masse et on introduit $\mathcal{A}$ le taux horaire de consommation de dioxygène par unité de masse, mesuré en mol·kg^{-1}·s^{-1}.

Étude préliminaire

1) Exprimer $\overrightarrow{j}(r)$, le vecteur densité de flux de particules diffusées, en fonction de D et $n(r)$.

2) Exprimer le flux $\phi(r)$ de molécules de dioxygène entrant dans une sphère de rayon $r > R$ en fonction de $j(r)$. Ce flux dépend-il de r pour le cas étudié ?

3) Déterminer l'expression de n_s, densité particulaire en dioxygène dissous sur la surface extérieure de la bactérie. On exprimera le résultat en fonction de ϕ, D, R et n_0.

Taille critique de la bactérie

4) Exprimer ϕ en fonction de R, $\mathcal{N}_a$, μ et $\mathcal{A}$.

5) En déduire l'expression de n_s. Commenter son expression.

6) Quelle inégalité doit être vérifiée afin que la bactérie ne suffoque pas ? En déduire l'expression du rayon critique R_c d'une bactérie aérobie.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) La loi de Fick s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{j} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}(n) = -D\,\frac{dn}{dr}\overrightarrow{u_r}}$$

2) Soit Σ la sphère de rayon r. Le flux $\oiint_\Sigma \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{dS}$ est un flux sortant (convention pour une surface fermée). Il représente donc le nombre de particules sortant par unité de temps dans la sphère. Le flux entrant s'écrit donc :

$$\boxed{\phi = -\oiint_\Sigma \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{dS} = -4\pi r^2 j(r)}$$

On est en régime permanent, on peut écrire que le nombre de molécules comprises entre deux sphères de rayons r_1 et r_2 ne varie pas pendant dt. Donc $\phi(r_1) = \phi(r_2)$: le flux ϕ ne dépend donc pas du rayon r de la sphère considérée.

3) D'après les questions précédentes, on a :

$$\phi = 4\pi D r^2\frac{dn}{dr} \quad\Rightarrow\quad dn = \frac{\phi}{4\pi D}\,\frac{dr}{r^2}$$

On intègre cette expression :

$$\int_{n_s}^{n_0} dn = \frac{\phi}{4\pi D}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{n_s = n_0 - \frac{\phi}{4\pi D R}}$$

4) Le nombre de molécules d'oxygène consommées par unité de temps et par unité de masse de bactérie est $\mathcal{N}_a\mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est compté en moles). La masse de la bactérie étant $\frac{4}{3}\pi R^3\mu$, on a donc :

$$\boxed{\phi = \frac{4}{3}\pi R^3\mu\mathcal{N}_a\mathcal{A}}$$

5) En remplaçant ϕ par son expression :

$$\boxed{n_s = n_0 - \frac{\mu\mathcal{N}_a\mathcal{A}R^2}{3D}}$$

Discussion sur l'influence des paramètres :

- si μ ou R augmente, la masse de la bactérie augmente, il en est de même pour la consommation de dioxygène : la densité en O_2 au niveau de la surface de la bactérie est donc plus faible ;
- de même si $\mathcal{A}$ augmente, la consommation totale de O_2 de la bactérie augmente : d'où une valeur plus faible de n_s ;
- si D augmente, le transport par diffusion de O_2 jusqu'à la surface de la bactérie est plus efficace : on obtient donc une valeur plus élevée de n_s.

6) Pour que la bactérie ne suffoque pas, il faut $n_s > 0$, d'où :

$$\boxed{R < R_c \quad \text{avec :} \quad R_c = \sqrt{\frac{3Dn_0}{\mu\mathcal{N}_a\mathcal{A}}}}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com