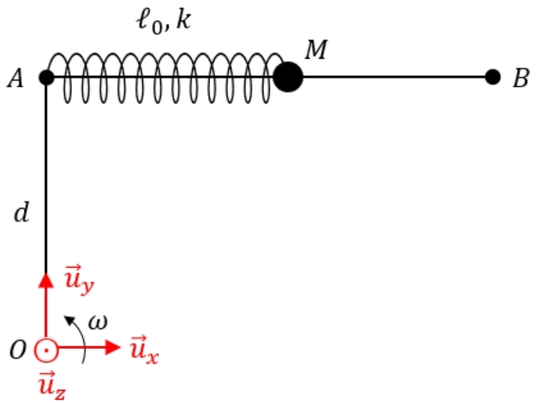
## Tachymètre

Un « L » métallique $OAB$ tourne à vitesse angulaire constante $\omega$ dans le plan horizontal autour de l'axe vertical $(Oz)$. Un ressort de raideur $k$ et de longueur naturelle $\ell_0$ est fixé en $A$ au dispositif et à son extrémité est attaché une masse $m$ qui coulisse sans frottement sur la partie rectiligne $AB$. On désigne par $\ell_{eq}$ la longueur du ressort à l'équilibre dans le référentiel tournant.

À l'instant initial, le ressort n'est ni comprimé, ni tendu et la masse a une vitesse nulle par rapport à la tige.

On note : $\omega_0^2 = k/m$ et $a = \omega_0/\omega$.




1) Établir l'équation différentielle du mouvement et la mettre sous forme canonique, en fonction de $\ell_0$, $a$ et $\omega$.

2) Montrer qu'il existe une valeur particulière de $a$, notée $a_c$, qui séparent les solutions en deux catégories : les solutions bornées et les solutions non bornées.

Dans la suite, on se place dans le cas où $a > a_c$.

3) Résoudre complètement l'équation différentielle.

4) Déterminer la force que la tige exerce sur la perle.

5) Montrer que le mouvement est conservatif.

6) Déterminer l'énergie potentielle du système. En déduire la/les positions d'équilibre ainsi que leur stabilité.

7) En réalité, on ne peut pas négliger les frottements. À quoi sert ce dispositif ? Où se trouve sa sensibilité maximale ? Comment modifier simplement le dispositif pour s'assurer que le tachymètre possède toujours une grande sensibilité sur une large plage de $\omega$ ?

Correction


Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

# Correction

1) On se place dans le référentiel $(O,x,y,z)$ tournant à la vitesse $\omega$ par rapport à un référentiel galiléen. Le point $M$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{OM} = (x, d, 0)$. Bilan des forces :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{R} = R_y\overrightarrow{u_y} + R_z\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{F_{el}} = -k\left(x - \ell_0\right)\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{f_{ie}} = m\omega^2\overrightarrow{OM} = m\omega^2\left(x\overrightarrow{u_x} + d\overrightarrow{u_y}\right) \\ \overrightarrow{f_{ic}} = -2m\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v} = -2m\omega\overrightarrow{u_z}\wedge\dot{x}\overrightarrow{u_x} = -2m\omega\dot{x}\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

On applique le PFD que l'on projette sur $(Ox)$.

$$m\ddot{x} = -k\left(x-\ell_0\right) + m\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \left(a^2-1\right)\omega^2\, x = a^2\omega^2\ell_0}$$

2) La nature des solutions change selon le signe de $a^2 - 1$. On pose donc : $\boxed{a_c = 1}$. Si $a > a_c$, alors les solutions sont bornées (oscillateur harmonique). Si $a \leq a_c$, alors les solutions ne sont pas bornées.

3) On pose $\boxed{\omega_1 = \omega\,\sqrt{a^2-1}}$. Solution :

$$x(t) = \frac{a^2}{a^2-1}\,\ell_0 + A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)$$

Avec les conditions initiales :

$$x(0) = \frac{a^2}{a^2-1}\,\ell_0 + A = \ell_0 \quad \Rightarrow \quad A = \left(1 - \frac{a^2}{a^2-1}\right)\ell_0 = -\frac{\ell_0}{a^2-1}$$

et,

$$v(0) = B\omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{x(t) = \frac{a^2 - \cos(\omega_1 t)}{a^2-1}\,\ell_0}$$

4) Il s'agit de la réaction normale du support. En appliquant le PFD sur $(Oy)$ et $(Oz)$, il vient immédiatement :

$$\boxed{\overrightarrow{R} = \left(2m\omega\dot{x} - m\omega^2 d\right)\overrightarrow{u_y} + mg\overrightarrow{u_z}}$$

5) Les forces $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{f_{ic}}$ sont orthogonales au mouvement et donc ne travaille pas. Les forces $\overrightarrow{F_{el}}$ et $\overrightarrow{f_{ie}}$ sont conservatives car elles dérivent d'une énergie potentielle (cf. ci-dessous). Le mouvement est donc conservatif.

6) L'énergie potentielle vaut :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k\left(x-\ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right)}$$

Le système impose $y = d$, le dernier terme est donc constant. On cherche les zéros de sa dérivée première pour trouver les positions d'équilibres.

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = k\left(x_{eq} - \ell_0\right) - m\omega^2 x_{eq} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{eq} = \frac{a^2}{a^2-1}\,\ell_0}$$

On trouve (évidemment) le même résultat qu'avec l'équation différentielle.

Déterminons le signe de la dérivée seconde pour connaître sa stabilité.

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} = k - m\omega^2 = m\omega^2\left(a^2-1\right) > 0$$

Cette position est toujours stable dans le cas où $a > a_c$.

7) Avec les frottement, le système finit par atteindre sa position d'équilibre.

$$x_{eq} = \frac{a^2}{a^2-1}\,\ell_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\,\ell_0$$

Connaître $x_{eq}$, c'est connaître $a$, donc $\omega$. Un tachymètre permet de mesurer des vitesse angulaires.

Un appareil sensible est un appareil pour lequel une petite variation de la grandeur que l'on cherche à mesurer ($\omega$) induise une grande variation de ce qui est réellement mesuré ($x_{eq}$). Mathématiquement, on veut que $dx_{eq}/d\omega$ soit le plus grand possible.

$$\frac{dx_{eq}}{d\omega} = \frac{-2\omega\omega_0^2\ell_0}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}$$

Sa sensibilité maximale se trouve donc pour $\omega \to \omega_0$.