Sphère chargée en rotation

On considère une sphère de centre O, de rayon R, uniformément chargée en surface avec une densité surfacique de charge σ et tournant sur elle même autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω.

On utilise les coordonnées sphériques.

<u>Formulaire</u> :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\cos^3(x)}{3}-\cos(x)\right]=\sin^3(x)$$

1) Quelle est l'expression de la charge portée par la couronne définie par $[\theta\,,\theta+d\theta]$ et $\varphi=[0\,,2\pi[$.

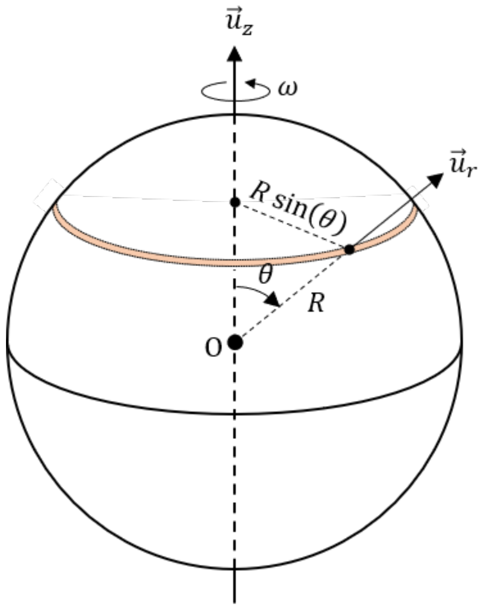
2) On assimile cette couronne à une spire. Quelle est l'intensité associée ? Déterminer alors le moment dipolaire de cette spire.

3) Déterminer le moment dipolaire de la sphère.

Correction

Correction

Schéma :



1) On rappelle l'expression du déplacement élémentaire en sphérique :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\,\sin(\theta)\,d\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

L'élément de surface sur la surface de la sphère ($r = R$) est donc donné par :

$$d^2S = +Rd\theta \times R\,\sin(\theta)\,d\varphi = R^2\,\sin(\theta)\,d\theta d\varphi$$

Pour avoir la surface de la couronne élémentaire, il faut intégrer par rapport à φ.

$$dS = R^2\,\sin(\theta)\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2\,\sin(\theta)\,d\theta$$

On en déduit la charge portée par cette couronne :

$$\boxed{dq = \sigma dS = 2\pi R^2 \sigma\,\sin(\theta)\,d\theta}$$

2) L'intensité est définie comme la charge portée par la spire, divisée par le temps nécessaire pour cette charge à faire une révolution complète. Ainsi :

$$\boxed{dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq}{2\pi/\omega} = R^2\sigma\omega\,\sin(\theta)\,d\theta}$$

Le moment dipolaire d'une spire est égal au produit de l'intensité par la surface de la spire, et orienté dans le sens de la main droite. Or, une couronne d'angle θ possède un rayon qui vaut $R\,\sin(\theta)$ et donc une surface qui vaut $\pi R^2\,\sin^2(\theta)$

$$\boxed{d\overrightarrow{\mu} = dI \times \pi R^2\,\sin^2(\theta)\,\overrightarrow{u_z} = \pi R^4 \sigma\omega\,\sin^3(\theta)\,d\theta\,\overrightarrow{u_z}}$$

3) Le moment total est donné par l'intégral du moment élémentaire sur toutes les spires.

$$\overrightarrow{\mu} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\overrightarrow{\mu} = \pi R^4\sigma\omega\,\sin^3(\theta)\,d\theta \int_0^{\pi} \sin^3(\theta)\,d\theta\,\overrightarrow{u_z}$$

Avec l'aide du formulaire, qui nous donne la primitive de $\sin^3(\theta)$, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{\mu} = \frac{4\pi}{3} R^4 \sigma\omega\,\overrightarrow{u_z}}$$