Régulation de vitesse par volant d'inertie

On s'intéresse dans cet exercice à la régulation de la vitesse de rotation d'une machine tournante par un volant d'inertie, qui est un anneau lié au rotor de masse élevée et d'assez grand rayon. La machine tournante en question peut aussi bien être un moulin à blé qu'un broyeur de cailloux, mais les volants d'inertie sont également utilisés en Formule 1 dans le KERS « Kinetic Energy Recovering System ».

On modélise ici la machine tournante par un rotor de moment d'inertie J, soumis à un couple moteur Γ_0 constant et à un couple de frottement de type fluide $\Gamma_f = -\alpha\omega$ où α est une constante et ω la vitesse angulaire du rotor.

1) Justifier par un argument énergétique que $\alpha > 0$.

2) Le rotor est initialement immobile. Donner l'évolution de sa vitesse angulaire $\omega(t)$, en introduisant la vitesse finale ω_∞ et un temps caractéristique τ.

3) Des vibrations du dispositif se traduisent par un nouveau couple exercé sur le rotor, que l'on prendra harmonique $\Gamma_{vib}(t) = \gamma \cos(\Omega t)$. Pourquoi ne perd-on pas en généralité en considérant ce couple harmonique ? Après un régime transitoire, la vitesse angulaire du rotor est elle aussi harmonique de pulsation Ω. Donner le temps caractéristique de la durée du transitoire.

4) Après la fin du transitoire, on cherche la vitesse angulaire de rotation ω sous la forme : $\omega(t) = \omega_\infty + A \cos(\Omega t + \phi)$. Déterminer l'amplitude A.

5) En déduire l'intérêt et l'inconvénient d'un volant d'inertie.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) La puissance de ce couple vaut :

$$\mathcal{P} = \Gamma_f \cdot \omega = -\alpha\omega^2$$

Or un couple de frottement doit dissiper de l'énergie, ie. $\mathcal{P} < 0$, donc $\alpha > 0$.

2) On applique le TMC au rotor :

$$J\dot{\omega} = \Gamma_0 - \alpha\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\omega} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_\infty}{\tau} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \tau = J/\alpha \\ \omega_\infty = \Gamma_0/\alpha \end{cases}}$$

3) N'importe qu'elle fonction périodique peut s'écrire comme une somme de fonctions harmoniques. Puisque les équations différentielles sont linéaires, si l'on connaît la solution pour une pulsation Ω donnée, on peut par superposition connaître la solution pour n'importe quelle fonction périodique.

Le TMC donne :

$$J\dot{\omega} = \Gamma_0 - \alpha\omega + \Gamma_{vib} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_\infty}{\tau} + \frac{\gamma}{J}\cos(\Omega t)$$

Le temps caractéristique est inchangé (τ), mais au lieu de converger vers une solution constante, on va converger faire une solution harmonique.

4) On se place en régime sinusoïdale forcé et donc on passe en notation complexe. On note : $\underline{A} = A\, e^{i\phi}$ l'amplitude complexe. L'équation différentielle devient :

$$i\Omega\underline{A} + \frac{\underline{A}}{\tau} = \frac{\gamma}{J} \quad \Rightarrow \quad \underline{A} = \frac{\gamma/J}{i\Omega + 1/\tau}$$

On en déduit A, le module de $\underline{A}$:

$$\boxed{A = |\underline{A}| = \frac{\gamma\tau/J}{\sqrt{1 + (\Omega\tau)^2}} = \frac{\gamma/\alpha}{\sqrt{1 + (\Omega J/\alpha)^2}}}$$

5) Un volant d'inertie permet de stocker l'énergie cinétique (lors d'un freinage) pour la restituer ultérieurement (lors d'une accélération). Il permet aussi d'atténuer l'amplitude des vibrations. En effet, il est précisé en introduction qu'un volant d'inertie « est un anneau lié au rotor de masse élevée et d'assez grand rayon ». Il augmente donc le moment d'inertie (J) du rotor, ce qui diminue A.

En revanche, un volant d'inertie augmente également la masse du véhicule. Il faut donc plus d'énergie pour mettre initialement la voiture en mouvement.

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com