

Réacteur nucléaire

On étudie un réacteur nucléaire à une dimension : la densité volumique de neutrons est $n(x, t)$. Dans le milieu, n/τ neutrons sont absorbés par unité de temps et de volume. Pour chaque neutron absorbé, K neutrons sont produits, avec $K > 1$. La diffusion des neutrons dans le milieu satisfait à la loi de Fick, et coefficient de diffusion étant noté D .

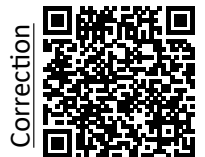
Le réacteur est assimilé à un cylindre de surface transverse S , et situé entre les plans d'abscisses $x = -a$ et $x = +a$. Les conditions aux limites imposent $n(x = \pm a, t) = 0$.

- 1) Établir l'équation aux dérivées partielles, notée (1), vérifiée par $n(x, t)$.
- 2) On se place en régime permanent et on note $n_0 = n(x = 0)$. Donner la forme générale de $n(x)$.
- 3) Déterminer la forme complète de $n(x)$ et montrer que le régime stationnaire n'est possible que pour une valeur L_s de la longueur du réacteur à déterminer.

On se place en régime quelconque. On cherche une solution de l'équation (1) sous la forme :

$$n(x, t) = f(x) \times e^{-t/T}$$

- 4) Déterminer $f(x)$ et T , et discuter de la stabilité du réacteur suivant les valeurs de sa longueur $L = 2a$.



Correction

1) On considère une section S comprise entre les abscisses x et $x + dx$. À l'instant t , elle contient :

$$\delta N(x, t) = n(x, t) S dx$$

neutrons. Entre t et $t + dt$, ce nombre de neutrons varie de :

$$d(\delta N) = \delta N(x, t + dt) - \delta N(x, t) = \frac{\partial n}{\partial t} S dx dt$$

Cette variation est égale à :

- + le nombre de neutrons reçu par diffusion en x pendant dt ;
- – le nombre de neutrons cédé par diffusion en $x + dx$ pendant dt ;
- – le nombre de neutrons absorbé dans le système pendant dt ;
- + le nombre de neutrons produit dans le système pendant dt .

Ainsi :

$$\frac{\partial n}{\partial t} S dx dt = j(x, t) S dt - j(x + dx, t) S dt - \frac{n}{\tau} S dx dt + K \frac{n}{\tau} S dx dt$$

Or, avec la loi de Fick :

$$j(x, t) S dt - j(x + dx, t) S dt = -\frac{\partial j}{\partial x} S dx dt = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} S dx dt$$

On a donc après simplification :

$$\boxed{\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} + \frac{K-1}{\tau} n(x, t)}$$

2) En régime permanent, l'équation précédente devient :

$$\frac{d^2 n(x)}{dx^2} + \frac{K-1}{D\tau} n(x) = 0$$

On pose :

$$k = \sqrt{\frac{K-1}{D\tau}}$$

grandeur ayant la dimension d'une longueur. On a :

$$\frac{d^2 n}{dx^2} + k^2 n(x) = 0 \Rightarrow \boxed{n(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)}$$

3) La condition initiale impose :

$$n(x=0) = n_0 = A$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$n(x = \pm a) = 0 = n_0 \cos(ka) \pm B \sin(ka)$$

On prend la différence des deux :

$$2B \sin(ka) = 0 \Rightarrow B = 0$$

On prend la somme des deux (sachant que $n_0 \neq 0$) :

$$2n_0 \cos(ka) = 0 \Rightarrow \cos(ka) = 0 \Rightarrow ka = \frac{\pi}{2} + p\pi \text{ avec : } p \in \mathbb{N}$$

Or $n(x)$ représente physiquement une densité volumique de neutrons. Il ne peut donc pas prendre de valeurs négatives. Donc seul $p = 0$ convient. Autrement dit, le régime permanent n'est possible que pour :

$$k = \frac{\pi}{2a} = \sqrt{\frac{K-1}{D\tau}} \Rightarrow \boxed{L_s = 2a = \pi \sqrt{\frac{D\tau}{K-1}}}$$

On en déduit :

$$\boxed{n(x) = n_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$$

4) En remplaçant $n(x, t)$ par la forme proposée, l'équation (1) devient :

$$-\frac{f(x)}{T} = D f''(x) + \frac{K-1}{\tau} f(x) \Rightarrow f''(x) + \sigma^2 f(x) = 0$$

avec :

$$\sigma = \sqrt{\frac{K-1}{\tau D} + \frac{1}{TD}}$$

Le raisonnement est alors identique au cas précédent.

$$\boxed{f(x) = n_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)} \text{ avec : } \frac{\pi}{2a} = \sqrt{\frac{K-1}{\tau D} + \frac{1}{TD}}$$

En notant $L = 2a$ la longueur du réacteur :

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{L_s}\right)^2 + \frac{1}{TD} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{D\pi^2} \times \frac{L^2 L_s^2}{L_s^2 - L^2}}$$

Ainsi :

- si $L < L_s$, le réacteur $T > 0$ donc $n(x, t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$: le réacteur s'éteint ;
- si $L > L_s$, le réacteur $T < 0$ donc $n(x, t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$: le réacteur s'emballe ;
- si $L = L_s$, le réacteur $T = 0$ donc le réacteur fonctionne en régime permanent.

En pratique, c'est K que l'on contrôle en plongeant plus ou moins des barres d'uranium dans le milieu.