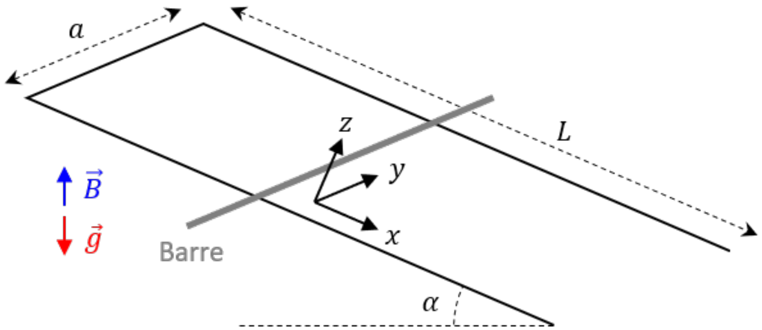
Rails de Laplace inclinés

Un barreau métallique de masse m glisse sans frottement mécanique sur deux rails conducteurs, séparés d'une distance a et inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note R la résistance de la barre que l'on suppose très grande devant celle des rails.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ dirigé selon la verticale ascendante. On repère par $x(t)$ la position du barreau le long des rails.



1) En appliquant la loi de Lenz, donner le sens du courant i qui circule dans le circuit. La force de Laplace accélère-t-elle ou freine-telle la chute du barreau ? Le barreau peut-il s'immobiliser ?

2) Exprimer la force de Laplace $\overrightarrow{F}_L$ qui s'exerce sur le barreau mobile en fonction de i, a, B et α.

3) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ et la résoudre, sachant que le barreau est lâché en $x = 0$ sans vitesse initiale. Justifier que le mouvement présente un régime transitoire de durée caractéristique τ à déterminer.

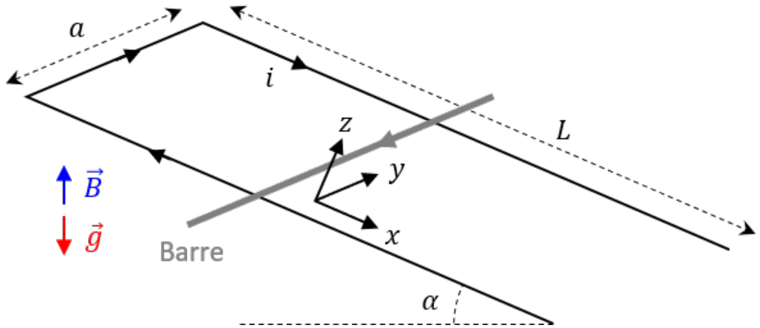
4) En déduire $x(t)$.

5) Les rails ont une longueur totale L. Déterminer l'énergie électrique totale perdue par effet Joule lors du mouvement du barreau sur les rails, en supposant le temps de chute très grand devant τ. Interpréter.

Correction

Correction

1) La cause du phénomène d'induction est la glissade du barreau sur les rails, dans la direction $+\vec{u}_x$. Le courant induit qui circule dans le circuit génère une force de Laplace induite, dont la loi de Lenz indique qu'elle s'oppose au mouvement : elle freine le barreau, donc est dirigée selon $-\vec{u}_x$. On en déduit que le sens réel du courant lorsqu'il traverse le barreau mobile est selon $-\vec{u}_y$ comme indiqué sur la figure ci-dessous. Le barreau ne peut cependant pas s'arrêter : s'il venait à s'arrêter, alors il n'y aurait plus de variations de flux donc plus d'induction ... et plus de force de Laplace induite pour le retenir, si bien que son poids l'entraînerait à nouveau.



2) On choisit le sens positif de i comme étant celui déterminé à la question précédente. La force de Laplace subie par le barreau vaut donc :

$$\vec{F}_L = i\,(-a\vec{u}_y) \wedge \vec{B} \quad \text{avec :} \quad \vec{B} = B\Big(-\sin(\alpha)\,\vec{u}_x + \cos(\alpha)\,\vec{u}_z\Big)$$

ce qui conduit donc à

$$\boxed{\vec{F}_L = -iaB\Big(\cos(\alpha)\,\vec{u}_x + \sin(\alpha)\,\vec{u}_z\Big)}$$

3) Le flux vaut :

$$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} \quad \text{avec :} \quad \vec{S} = -ax\,\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \phi = -aBx\cos(\alpha)$$

On en déduit la force électromotrice induite :

$$\boxed{e = -\frac{d\phi}{dt} = aBv\cos(\alpha) = Ri}$$

Bilan des forces :

- Poids du barreau : $\vec{P} = mg\Big(\sin(\alpha)\,\vec{u}_x - \cos(\alpha)\,\vec{u}_z\Big)$
- Force de Laplace : $\vec{F}_L = -iaB\Big(\cos(\alpha)\,\vec{u}_x + \sin(\alpha)\,\vec{u}_z\Big)$
- Réaction des rails : $\vec{N} = N\vec{u}_z$

On applique le PFD sur la barre dans le référentiel terrestre supposé galiléen, que l'on projette selon $\vec{u}_x$.

$$m\dot{v} = mg\sin(\alpha) - iaB\cos(\alpha)$$

On utilise l'équation électrique pour faire disparaître i de l'équation.

$$m\dot{v} = mg\sin(\alpha) - \frac{a^2B^2v}{R}\cos^2(\alpha)$$

Sous forme canonique :

$$\boxed{\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{mR}{a^2B^2\cos^2(\alpha)} \quad \text{et} \quad v_\infty = \frac{mgR\sin(\alpha)}{a^2B^2\cos^2(\alpha)}}$$

La solution qui respecte les conditions initiales est :

$$\boxed{v(t) = v_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

4) On intègre cette fonction en respectant les conditions initiales :

$$\boxed{x(t) = v_\infty\left[t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right]}$$

5) On fait un bilan de puissance en multipliant l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v.

$$aBiv\cos(\alpha) = Ri^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgx\sin(\alpha)\right) = -ivaB\cos(\alpha)$$

On combine les deux équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgx\sin(\alpha)\right) = -Ri^2$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

On en déduit l'énergie perdue par effet Joule entre l'instant initial et l'instant final, sachant que le temps final est très grand devant τ, donc $v = v_\infty$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_J &= \int_{\text{EI}}^{\text{EF}} Ri^2 \, dt \\
&= -\int_{\text{EI}}^{\text{EF}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgx\,\sin(\alpha)\right)\, dt \\
&= -\left[\frac{1}{2}mv^2 - mgx\,\sin(\alpha)\right]_{\text{EI}}^{\text{EF}} \\
&= -\left(\frac{1}{2}mv_\infty^2 - mgL\,\sin(\alpha)\right) \\
&= \boxed{mgL\,\sin(\alpha) - \frac{1}{2}mv_\infty^2}
\end{aligned}$$

Cette équation traduit le fait que la perte d'énergie mécanique correspond à l'énergie perdue par effet Joule.