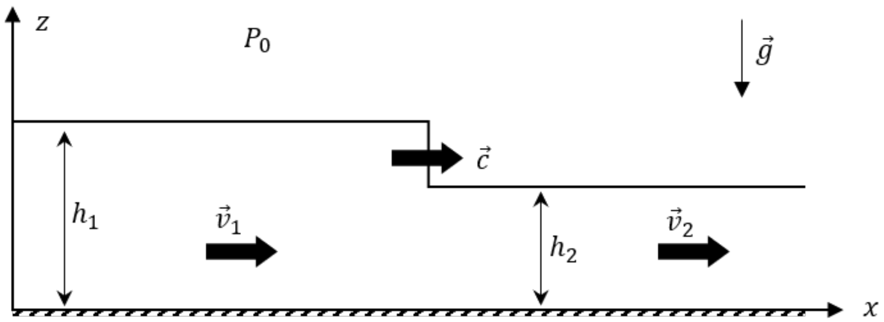
Propagation d'une discontinuité de hauteur d'eau

Dans un canal rectiligne, de largeur L constante et de fond horizontal, on observe la propagation d'une discontinuité de hauteur d'eau à la vitesse $\overrightarrow{c} = c\,\overrightarrow{u_x}$, parallèle à direction du canal. L'écoulement est supposé parfait et incompressible. L'eau est de masse volumique ρ uniforme.



En amont de la discontinuité, la hauteur d'eau est h_1 et la vitesse d'écoulement $\overrightarrow{v_1} = v_1\,\overrightarrow{u_x}$ est uniforme et constante. En aval, la hauteur d'eau est $h_2 < h_1$et la vitesse d'écoulement nulle $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$. La pression au dessus de la surface libre est P_0.

1) Justifier que le champ de pression dans le fluide est en tout point de l'écoulement celui d'un fluide en équilibre hydrostatique.

2) À l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, établir l'expression de c en fonction de h_1, h_2 et v_1.

3) Commenter le cas limite où $h_1 - h_2 \ll h_2$.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) On utilise la relation de Bernoulli pour l'écoulement avant la discontinuité (écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène) entre la surface libre et un un point d'altitude z :

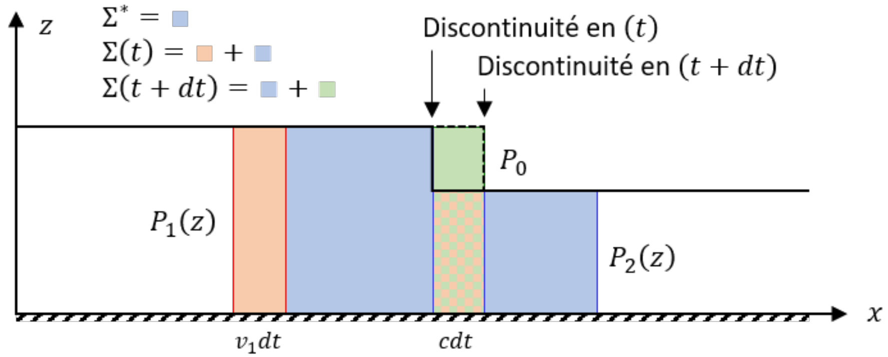
$$P_0 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_1(z) + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_1(z) = P_0 + \rho g \left(h_1 - z\right)}$$

Il s'agit de la même relation que celle de la statique des fluide, car $h_1 - z$ représente bien la profondeur.

Pour l'écoulement après la discontinuité, le fluide est statique donc il n'y a rien à démontrer :

$$\boxed{P_2(z) = P_0 + \rho g \left(h_2 - z\right)}$$

2) On fait un bilan de quantité de mouvement (projeté directement sur x) sur le système fermé décrit ci-dessous. On indique par $*$ la partie commune au système à t et $t + dt$.



$$\frac{dp}{dt} = \sum f_P = F_1 - F_2$$

Pour les quantités de mouvement :

$$\begin{cases} p(t+dt) = p^* + \rho L h_1 c^2 dt \\ p(t) = p^* + \rho L h_1 v_1^2 dt \end{cases}$$

En effet, la quantité de mouvement d'un rectangle vaut :

$$p = \text{masse} \times \text{vitesse} = \rho \times Lhvdt \times v = \rho L h v^2 dt$$

Donc :

$$\frac{dp}{dt} = \rho L h_1 \left(c^2 - v_1^2\right)$$

Pour les forces de pression, il faut sommer les forces élémentaires de 0 à h_1 (même pour l'écoulement après la discontinuité, où la pression vaut P_0 pour $h_2 < z < h_1$) :

$$\begin{cases} F_1 = \displaystyle\int_0^{h_1} P_1 L dz = P_0 L h_1 + \frac{\rho g L h_1^2}{2} \\ F_2 = \displaystyle\int_0^{h_2} P_2 L dz + \int_{h_2}^{h_1} P_0 L dz = P_0 L h_1 + \frac{\rho g L h_2^2}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$\rho L h_1 \left(c^2 - v_1^2\right) = \frac{\rho g L}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{c^2 = v_1^2 + \frac{g}{2h_1}\left(h_1^2 - h_2^2\right)}$$

3) La condition $h_1 - h_2 \ll h_2$ signifie que la marche est très petite, donc que $h_1 \simeq h_2$. On en déduit donc :

$$\boxed{c \simeq v_1}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com