

Propagation de la houle sans vent

On étudie la propagation de la houle à la surface d'une eau de profondeur h , par exemple créée par une tempête. Lorsque le vent est tombé ou lorsque les vagues s'éloignent de la zone de tempête, la houle devient périodique et la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = gk \tanh(hk)$$

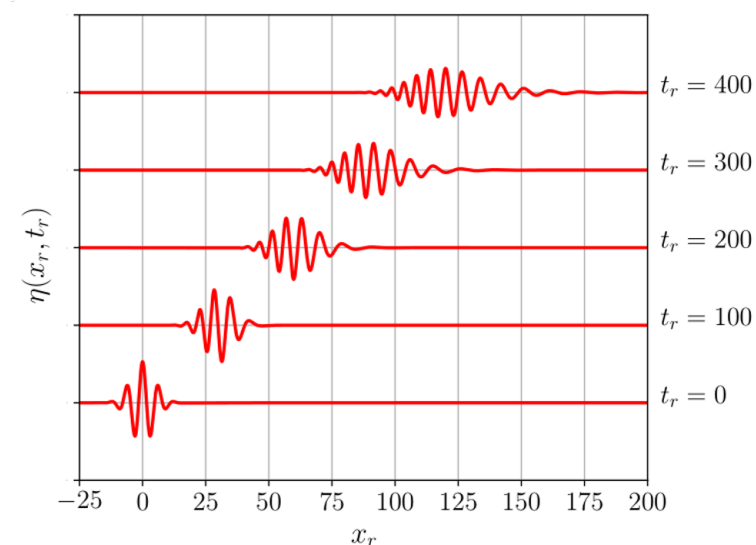
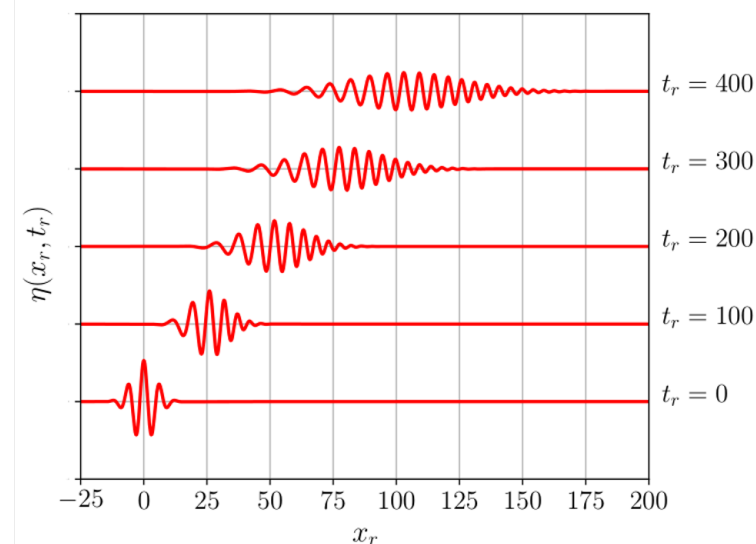
1) On parle de houle en eau profonde lorsque $hk \gg 1$. Simplifier dans ce cas la relation de dispersion précédente, puis calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de g et k . Indiquer, en justifiant, si le phénomène de propagation est dispersif.

On considère un paquet d'ondes gaussien centré autour d'une valeur k_0 de k qui se propage selon la direction x croissants. Les figures au dos de la feuille représentent deux évolutions différentes envisagées pour ce paquet d'ondes lors de sa propagation. Chaque courbe correspond au profil spatial de la vague à un temps donné.

2) Justifications à l'appui, préciser si les deux figures correspondent toutes deux à un phénomène de propagation dispersif et déterminer celle qui peut correspondre à la relation de dispersion de la houle en eau profonde.

3) Au voisinage des rivages, pour des hauteurs d'eau suffisamment faibles, on peut adopter cette fois le modèle de la houle en eau peu profonde suivant la condition $hk \ll 1$. Simplifier dans ce cas la relation de dispersion de la houle sans vent, puis exprimer les vitesses de phase et de groupe.

4) Reproduire dans ce cas la figure précédente et dessiner ce qu'il advient du paquet d'onde pour les différents t_r , en partant du même paquet d'onde pour $t_r = 0$.



Correction

1) Lorsque $hk \gg 1$:

$$\tanh(hk) \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = gk}$$

La relation entre ω et k n'est pas linéaire, la propagation est donc dispersive.

On en déduit :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}}$$

2) Le paquet d'onde s'étale : la propagation est donc dispersive. Sur l'image du haut, on peut voir que les petites longueurs d'onde du paquet d'onde se sont propagées plus rapidement que les grandes longueurs d'onde. C'est l'inverse sur la figure du bas.

Or, d'après la question précédente :

$$v_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} \quad \Rightarrow \quad v_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Plus λ est grand, plus v_g est grand. C'est donc l'image du bas qui correspond au cas de la houle en eau profonde.

3) Lorsque $hk \ll 1$:

$$\tanh(hk) \simeq hk \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = ghk^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = k\sqrt{gh}}$$

La relation entre ω et k est linéaire, la propagation est donc non dispersive.

On en déduit :

$$\boxed{v_\varphi = v_g = \sqrt{gh}}$$

4) Reproduire le même paquet d'onde sans déformation aux différents temps.