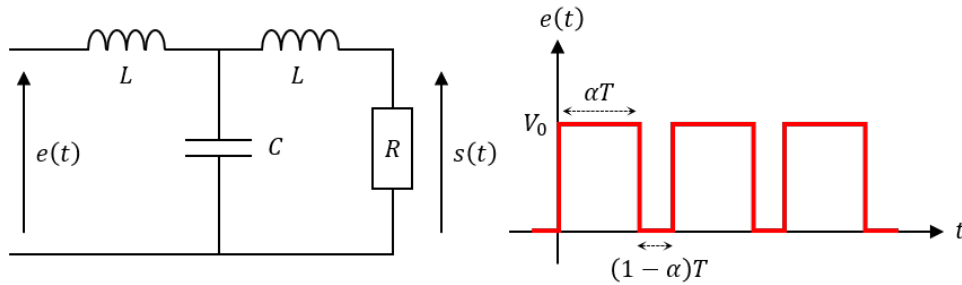


Production d'une tension sinusoïdale

On souhaite produire un signal sinusoïdal de période $T = 50 \mu\text{s}$, et de valeur moyenne V_1 et d'amplitude V_0 . Pour cela, on étudie le circuit suivant.

On alimente ce circuit avec le signal $e(t)$ suivant, qui est un signal créneau de période T , variant entre 0 et V_0 et de rapport cyclique $\alpha \in [0; 1]$.

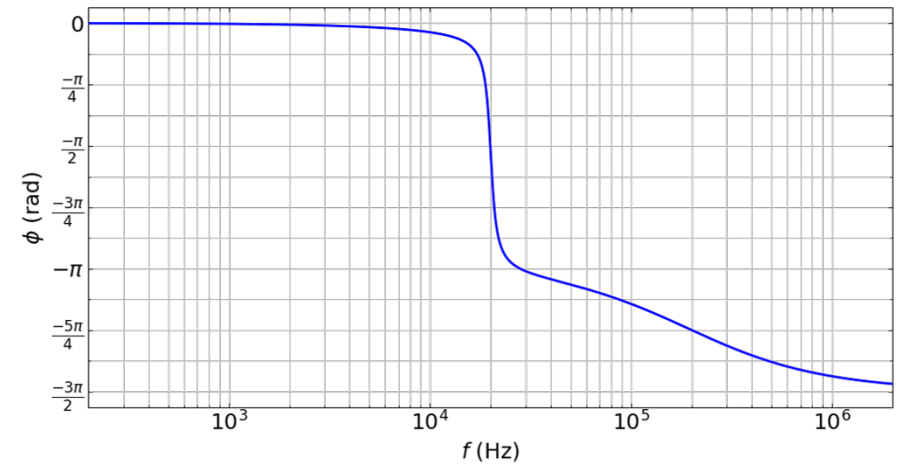
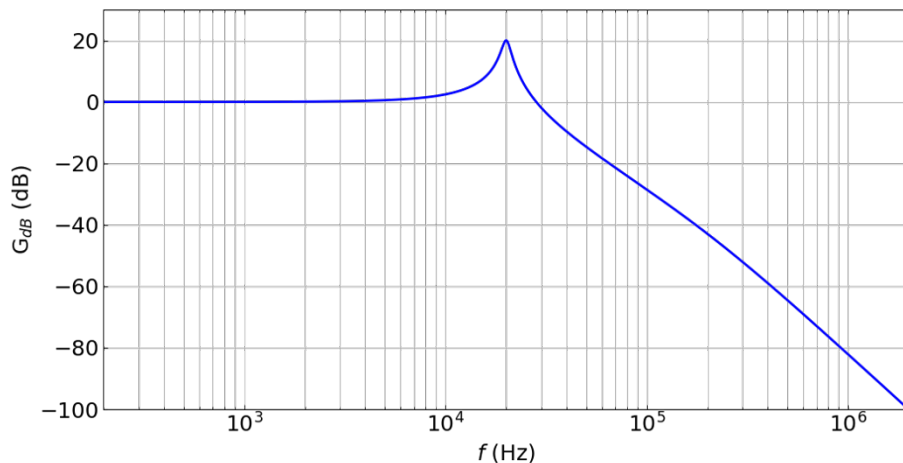


1) Sans calcul, déterminer la nature du filtre.

2) Déterminer la fonction de transfert du filtre.

On donne ci-après diagramme de Bode en gain G_{dB} et en phase ϕ du filtre. On admet que la valeur de la pulsation ω_0 maximisant G_{dB} ainsi que $G_{dB}(\omega_0)$ sont définis par :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad G_{dB}(\omega_0) = -20 \log\left(\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$



3) Commenter l'allure des diagrammes.

On rappelle la décomposition de Fourier d'une fonction T -périodique :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

Avec $\forall t_0 \in \mathbb{R}$:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad \text{et} \quad b_0 = 0$$

Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

4) Calculer a_0 , a_1 et b_1 pour la tension d'entrée, puis les sorties correspondantes. Pourquoi ces grandeurs sont-elles suffisantes pour calculer le signal de sortie total ?

5) Quelle est la forme du signal de sortie ? Peut-on manipuler la valeur moyenne ? L'amplitude ? La phase à l'origine ?

6) Conclure par rapport au problème de départ.



Correction

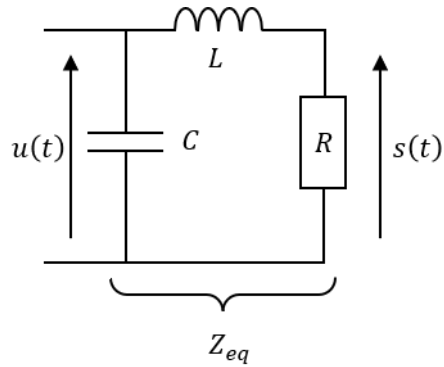
Correction

1) En basses fréquences, les bobines sont équivalentes à des fils et le condensateur à un circuit ouvert. Donc $s(t) = e(t)$.

En hautes fréquences, c'est l'inverse. La condensateur vient donc court-circuiter la branche contenant bobine et résistance. Donc $s(t) = 0$.

Il s'agit d'un passe-bas.

2) Notations :



On fait deux ponts diviseur de tension successifs. Premier pont :

$$\frac{u}{s} = \frac{R}{j\omega L + R}$$

Deuxième pont :

$$\frac{e}{u} = \frac{Z_{eq}}{j\omega L + Z_{eq}} \quad \text{avec : } Z_{eq} = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L + R} \right)^{-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \underline{H} = \frac{e}{u} \cdot \frac{u}{s} &= \frac{1}{1 + \left(j\omega RC + \frac{1}{1 + j\omega L/R} \right) j\omega L/R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega L/R} \\ &= \frac{1}{1 + 2j\omega L/R - \omega^2 LC - j\omega^3 L^2 C/R} \end{aligned}$$

3) On retrouve bien un passe-bas (cf. gain) d'ordre 3 (pente de -60 dB/dec du gain où chute de $3 \times \pi/2$ de la phase).

4) La tension d'entrée vaut V_0 si $0 < t < \alpha T$ et 0 si $\alpha T < t < T$. Ainsi :

$$a_0 = \frac{V_0}{T} \int_0^{\alpha T} dt = \alpha V_0$$

$$a_1 = \frac{V_0}{T} \int_0^{\alpha T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{V_0}{2\pi} [1 - \sin(2\pi\alpha)]$$

$$b_1 = \frac{V_0}{T} \int_0^{\alpha T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{V_0}{2\pi} [\cos(2\pi\alpha) - 1]$$

On remarque que la fréquence du signal correspond à la fréquence de résonance du filtre. L'harmonique de rang 2, de fréquence 40 kHz, possède un gain 30 dB plus faible que le fondamental. On pourra donc négliger la contribution que cet harmonique, et donc des suivants.

5) Le signal de sortie est de la forme (car $\underline{H}(0) = 1$ et $\underline{H}(f_1) = 10$) :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= a_0 + 10 \left[a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \\ &= \alpha V_0 + 10 \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \arctan\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)\right) \end{aligned}$$

Les deux paramètres α et V_0 contrôlent la valeur moyenne, l'amplitude et la phase à l'origine. En revanche, bien qu'il soit possible de choisir deux de ce paramètres, le troisième sera nécessairement imposé.

6) On souhaite une amplitude de V_0 . Ainsi :

$$V_0^2 = 100 (a_1^2 + b_1^2) = \left(\frac{10V_0}{2\pi}\right)^2 \left[(1 - \sin(2\pi\alpha))^2 + (\cos(2\pi\alpha) - 1)^2 \right]$$

Cette équation possède 2 solutions (résolution numérique) :

$$\begin{cases} 2\pi\alpha = 0,385 & \Rightarrow \alpha = 0,0613 \text{ rad} = 3,51^\circ \\ 2\pi\alpha = 1,185 & \Rightarrow \alpha = 0,189 \text{ rad} = 10,8^\circ \end{cases}$$

Prenons la deuxième solution, car α est plus grand, ce qui permet de choisir un V_0 plus petit. En effet, on souhaite une valeur moyenne de V_1 :

$$V_1 = \alpha V_0$$

La phase à l'origine est alors imposée (on ne souhaitait pas de valeur particulière).