

Problème de Laplace en géométrie cylindrique

On considère un cylindre parfaitement conducteur d'axe (Oz) (le cylindre est infini selon z) et de rayon R maintenu au potentiel nul ($V = 0$) et plongé dans un champ électrique extérieur uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$. Le conducteur étant parfait, le champ électrique doit nécessairement être nul dans ce dernier. Ainsi, une distribution surfacique de charge σ va apparaître sur la périphérie du cylindre, créant un champ électrique \vec{E}_c , de sorte que $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E}_c = \vec{0}$ dans le cylindre.

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les expressions du potentiel total $V_{tot}(M)$, du champ électrique total $\vec{E}_{tot}(M)$ et de la distribution de charge σ .

Formulaire : en coordonnées cylindriques

$$\vec{\text{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

1) Justifier que $V_{tot}(M) = V_{tot}(r, \theta)$. Quelle relation existe-t-il entre $V_{tot}(r, \theta)$ et $V_{tot}(r, -\theta)$?

2) Quelle est l'équation locale satisfaite par V_{tot} à l'extérieur du cylindre ?

On se propose de chercher une solution de la forme :

$$V_{tot}(r, \theta) = V_0 + f(r) \times g(\theta)$$

où V_0 est le potentiel créé par le champ \vec{E}_0 .

3) Déterminer, à une constante près, la fonction $g(\theta)$.

4) Chercher $f(r)$ de la forme r^n . En déduire l'expression générale de $V_{tot}(r, \theta)$ (on fera apparaître des constantes que l'on déterminera dans la question suivante).

Au passage d'une interface d'un milieu 1 vers un milieu 2, le champ électrique doit vérifier la relation suivante :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

où $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ est le vecteur unitaire normal à l'interface dirigé de 1 vers 2.

5) À l'aide des conditions aux limites, déterminer les constantes intervenant dans l'expression générale de $V_{tot}(r, \theta)$.

6) En déduire l'expression de $\vec{E}_{tot}(M)$ à l'extérieur du cylindre. Dessiner la carte de ligne de champ.

7) Déterminer l'expression de la distribution surfacique de charge σ .



Correction

1) Le cylindre et le champ \vec{E}_0 possèdent tous les deux une invariance commune : l'invariance par translation selon z . Le problème est donc invariant par translation selon z . Donc :

$$V_{tot}(M) = V_{tot}(r, \theta)$$

De plus, le plan (O, x, z) est un plan de symétrie du cylindre et du champ \vec{E}_0 . Le plan est donc également un plan de symétrie de $\vec{E}_{tot}(M)$ et donc :

$$V_{tot}(r, \theta) = V_{tot}(r, -\theta)$$

2) Il n'y a aucune charge à l'extérieur du cylindre (vide). Donc :

$$\text{div}(\vec{E}_{tot}) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{E}_{tot} = -\vec{\text{grad}}(V_{tot}) \quad \Rightarrow \quad \Delta V_{tot} = 0$$

Équation de Poisson.

3) On injecte la solution proposée dans l'équation de Poisson et on utilise le formulaire.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f' g) + \frac{f g''}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f' g}{r} + f'' g + \frac{f g''}{r^2} = 0$$

On peut séparer les variables :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f' g) + \frac{f g''}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{r f'}{f} + \frac{r^2 f''}{f}}_{\text{fonction de } r} = \underbrace{-\frac{g''}{g}}_{\text{fonction de } \theta} = K$$

Une fonction de r ne peut être égale à une fonction de θ uniquement si ces deux fonctions sont constantes. On appelle K cette constante. Ainsi :

$$g'' + K g = 0$$

La solution recherchée doit être 2π périodique (solution en cosinus / sinus avec une période de 2π) : on a donc nécessairement $K = 1$. Enfin, on a montré à la première question que la solution était paire. La solution s'écrit :

$$g(\theta) = \cos(\theta)$$

On pourrait ajouter une constante devant de cosinus, mais il est en réalité plus simple de cacher toutes les constantes dans la fonction $f(r)$.

4) On injecte la forme proposée dans l'équation obtenue à la question précédente.

$$\frac{r f'}{f} + \frac{r^2 f''}{f} = 1 \quad \Rightarrow \quad n + n(n-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n = \pm 1$$

On peut multiplier chaque solution par une constante. On obtient donc la forme générale suivante :

$$V_{tot}(r, \theta) = V_0 + \left[A r + \frac{B}{r} \right] \cos(\theta)$$

5) Si $r \rightarrow \infty$, alors $V_{tot} \rightarrow V_0$: très loin du cylindre, on n'est plus influencé par ce dernier. On en déduit : $A = 0$.

Déterminons l'expression du champ \vec{E}_{tot} .

$$\vec{E}_0 = -\vec{\text{grad}}(V_0) = E_0 \vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad V_0 = -E_0 x = -E_0 r \cos(\theta)$$

Ainsi :

$$\vec{E}_{tot} = -\vec{\text{grad}}(V_{tot}) = \left[E_0 + \frac{B}{r^2} \right] \cos(\theta) \vec{u}_r - \left[E_0 - \frac{B}{r^2} \right] \sin(\theta) \vec{u}_\theta$$

On utilise finalement la relation de passage de l'interface avec 1 le milieu intérieur et 2 le milieu extérieur.

- $\vec{E}_2 = \vec{E}_{tot}(r = R^+)$ est le champ à l'extérieur du cylindre que l'on vient de déterminer ;
- $\vec{E}_1 = \vec{0}$ est le champ à l'intérieur du cylindre et l'énoncé précise qu'il est nul ;
- $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{u}_r$ est le vecteur unitaire normal à l'interface.

On a donc :

$$\vec{E}_{tot}(r = R^+) = \left[E_0 + \frac{B}{R^2} \right] \cos(\theta) \vec{u}_r - \left[E_0 - \frac{B}{R^2} \right] \sin(\theta) \vec{u}_\theta = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r$$

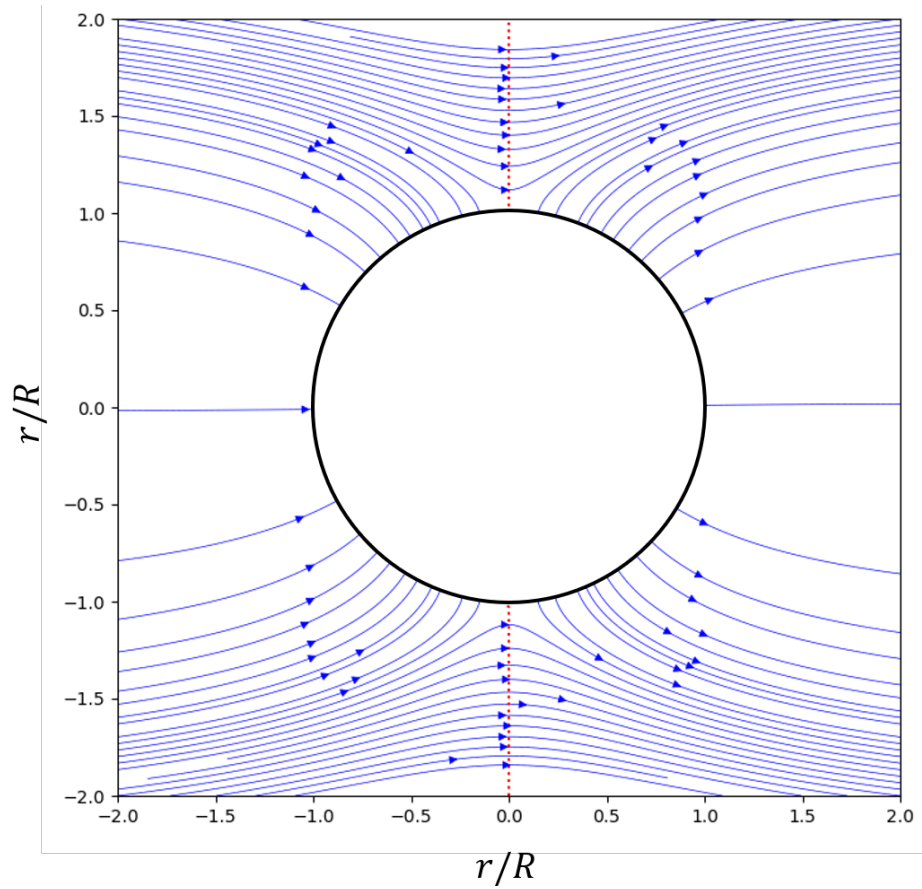
La projection de cette équation selon \vec{u}_θ donne :

$$-\left[E_0 - \frac{B}{R^2} \right] \sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = E_0 R^2$$

6) On a donc trouvé :

$$\vec{E}_{tot} = E_0 \left[1 + \frac{R^2}{r^2} \right] \cos(\theta) \vec{u}_r - E_0 \left[1 - \frac{R^2}{r^2} \right] \sin(\theta) \vec{u}_\theta$$

Graphiquement :



7) La projection de la relation de passage selon \vec{u}_r donne :

$$E_0 \left[1 + \frac{R^2}{r^2} \right] \cos(\theta) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\sigma = E_0 \varepsilon_0 \left[1 + \frac{R^2}{r^2} \right] \cos(\theta)}$$