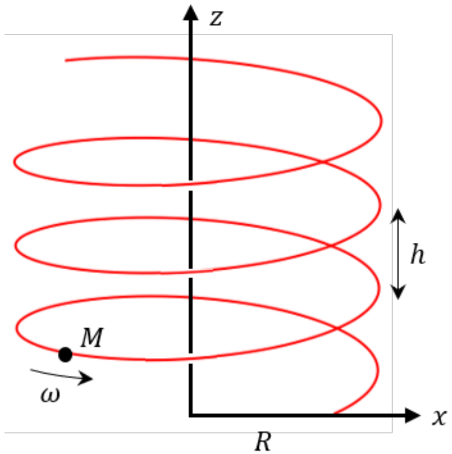
Piste hélicoïdale

Soit une piste hélicoïdale de rayon R et de pas $h = 2\pi R$ centré sur l'axe (Oz) vertical. On se place en coordonnées cylindriques. Un point M se trouvant initialement en $z = 0$ et $\theta = 0$ parcourt la piste avec une vitesse angulaire ω constante.



1) Reproduire le schéma et indiquer les vecteurs de base au niveau du point M.

2) Déterminer la relation entre $z(t)$ et $\theta(t)$.

3) Déterminer l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans la base cylindrique, en fonction de R, θ et ω.

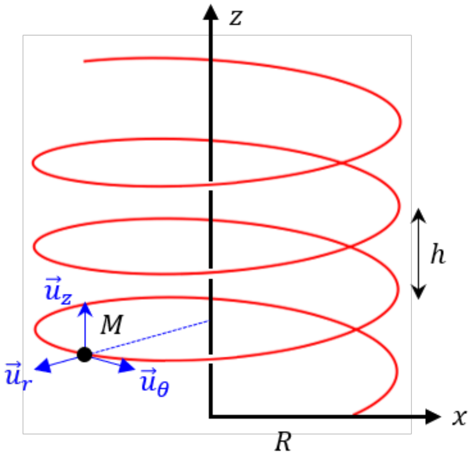
4) Déterminer le vecteur unitaire tangent à la trajectoire.

5) Déterminer le rayon de courbure R_c.

Correction

Correction

1) Schéma :



2) Dans une hélice, z croît linéairement avec θ, donc : $z = a\theta$. Or, quand $z = h = 2\pi R$, $\theta = 2\pi$. Donc :

$$\boxed{z = R\theta}$$

3) On a :

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} = R\overrightarrow{u_r} + R\theta\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{v} = R\omega\left(\overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{u_z}\right)$$
$$\overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r}$$

4) Par définition du vecteur unitaire tangent à la trajectoire :

$$\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{u_T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{u_T} = \frac{\overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{u_z}}{\sqrt{2}}}$$

5) Le mouvement étant uniforme, l'accélération dans la base de Frenet vaut :

$$\overrightarrow{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R_c}\overrightarrow{u_N} = \frac{v^2}{R_c}\overrightarrow{u_N}$$

On en déduit :

$$\frac{v^2}{R_c} = \frac{2R^2\omega^2}{R_c} = R\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_c = 2R}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com