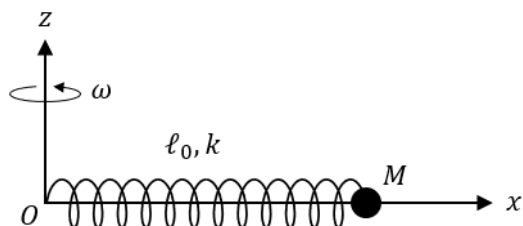


## Perle sur une tige en rotation

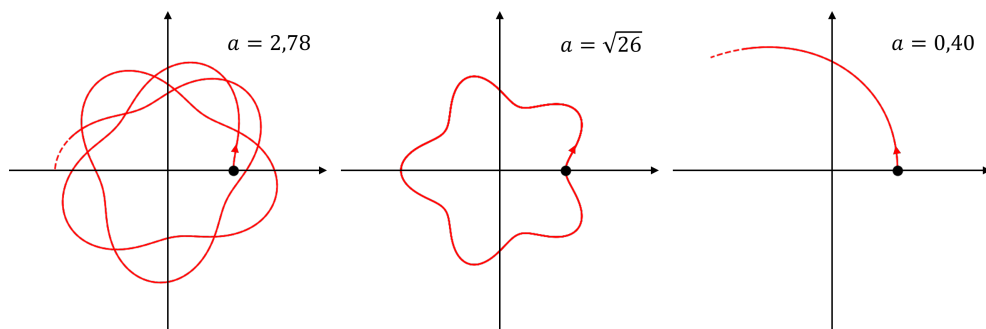
Une petite perle, assimilée à un point matériel  $M$  glisse sans frottement sur une tige horizontale d'axe  $(Ox)$ , tournant à la vitesse constante  $\omega$  autour de l'axe vertical  $(Oz)$ . La perle est liée au point  $O$  par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . À l'instant initial, le ressort n'est ni comprimé, ni tendu et la perle a une vitesse nulle par rapport à la tige.

On note :  $\omega_0^2 = k/m$  et  $a = \omega_0/\omega$ .



1) Établir l'équation différentielle du mouvement et la mettre sous forme canonique, en fonction de  $\ell_0$ ,  $a$  et  $\omega$ .

On donne ci-dessous l'allure de la trajectoire de  $M$  pour différentes valeurs de  $a$ , dans le référentiel terrestre galiléen. Le point noir représente le point de départ.



2) Montrer qu'il existe une valeur particulière de  $a$ , notée  $a_c$ , qui séparent les solutions en deux catégories : les solutions bornées et les solutions non bornées.

Dans la suite, on se place dans le cas où  $a > a_c$ .

3) Résoudre complètement l'équation différentielle et montrer que le ressort possède une longueur toujours supérieure à sa longueur à vide.

4) Déterminer la force que la tige exerce sur la perle.

5) Montrer que le mouvement est conservatif.

6) Déterminer l'énergie potentielle du système. En déduire la/les positions d'équilibre ainsi que leur stabilité.

7) Déterminer la relation que doit vérifier  $a$  pour que la trajectoire se ferme au bout d'un tour, comme indiquée sur l'image centrale. En déduire la relation que doit vérifier  $a$  pour que la trajectoire se ferme au bout d'un ou plusieurs tours.



## Correction

1) On se place dans le référentiel tournant à la vitesse  $\omega$  par rapport à un référentiel galiléen. Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z \\ \vec{R} = R_y\vec{u}_y + R_z\vec{u}_z \\ \vec{F}_{el} = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x \\ \vec{f}_{ie} = m\omega^2 x\vec{u}_x \\ \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2m\omega\vec{u}_z \wedge \dot{x}\vec{u}_x = -2m\omega\dot{x}\vec{u}_y \end{cases}$$

On applique le PFD que l'on projette sur  $(Ox)$ .

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) + m\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + (a^2 - 1)\omega^2 x = a^2\omega^2\ell_0$$

2) La nature des solutions change selon le signe de  $a^2 - 1$ . On pose donc :  $a_c = 1$ . Si  $a > a_c$ , alors les solutions sont bornées (oscillateur harmonique). Si  $a \leq a_c$ , alors les solutions ne sont pas bornées.

3) On pose  $\omega_1 = \omega\sqrt{a^2 - 1}$ . Solution :

$$x(t) = \frac{a^2}{a^2 - 1}\ell_0 + A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)$$

Avec les conditions initiales :

$$x(0) = \frac{a^2}{a^2 - 1}\ell_0 + A = \ell_0 \Rightarrow A = \left(1 - \frac{a^2}{a^2 - 1}\right)\ell_0 = -\frac{\ell_0}{a^2 - 1}$$

et,

$$v(0) = B\omega_1 = 0 \Rightarrow B = 0$$

Ainsi :

$$x(t) = \frac{a^2 - \cos(\omega_1 t)}{a^2 - 1}\ell_0$$

On a de plus :

$$-\cos(\omega_1 t) \geq -1 \Rightarrow a^2 - \cos(\omega_1 t) \geq a^2 - 1 > 0$$

Ainsi,

$$\frac{a^2 - \cos(\omega_1 t)}{a^2 - 1} \geq 1 \Rightarrow x(t) \geq \ell_0$$

4) Il s'agit de la réaction normale du support. En appliquant le PFD sur  $(Oy)$  et  $(Oz)$ , il vient immédiatement :

$$\vec{R} = 2m\omega\dot{x}\vec{u}_y + mg\vec{u}_z$$

5) Les forces  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}$  et  $\vec{f}_{ic}$  sont orthogonales au mouvement et donc ne travaillent pas. Les forces  $\vec{F}_{el}$  et  $\vec{f}_{ie}$  sont conservatives car elles dérivent d'une énergie potentielle (cf. ci-dessous). Le mouvement est donc conservatif.

6) L'énergie potentielle vaut :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

On cherche les zéros de sa dérivée première pour trouver les positions d'équilibre.

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = k(x_{eq} - \ell_0) - m\omega^2 x_{eq} = 0 \Rightarrow x_{eq} = \frac{a^2}{a^2 - 1}\ell_0$$

On trouve (évidemment) le même résultat qu'avec l'équation différentielle. Déterminons le signe de la dérivée seconde pour connaître sa stabilité.

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} = k - m\omega^2 = m\omega^2(a^2 - 1) > 0$$

Cette position est toujours stable dans le cas où  $a > a_c$ .

7) Notons  $T_1$  la période des oscillations et  $T$  la période de révolution autour de l'axe  $(Oz)$ . Pour que la trajectoire se ferme au bout d'un tour, il faut que le système est fait un nombre entier d'oscillations en une période de révolution. Ainsi :

$$T = n \times T_1 \quad \text{avec : } n \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi,

$$n = \frac{T}{T_1} = \sqrt{a^2 - 1} \Rightarrow a = \sqrt{n^2 + 1} \quad \text{avec : } n \in \mathbb{N}^*$$

C'est le cas de la figure où  $n = 5$  oscillations en un tour.

Dans le cas où la trajectoire se ferme au bout de  $p$  tours et  $n$  oscillations, on a la relation :

$$p \times T = n \times T_1 \quad \text{avec : } p, n \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi,

$$q = \frac{n}{p} = \frac{T}{T_1} = \sqrt{a^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \sqrt{q^2 + 1} \quad \text{avec : } q \in \mathbb{Q}^*}$$