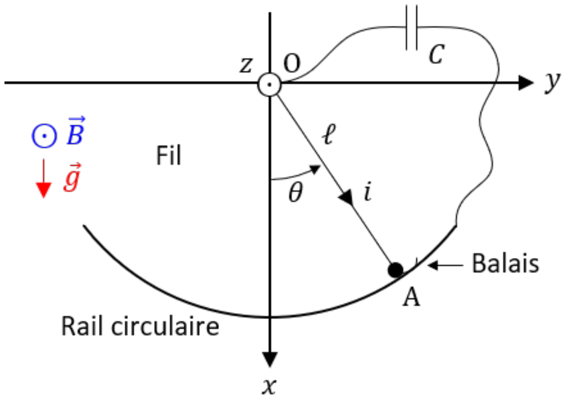
Pendule simple et induction

On réalise un pendule simple en supposant une masselotte ponctuelle A de masse m, à une tige conductrice rigide de masse négligeable devant m et de longueur $\ell = OA$. La liaison pivot en O est supposée parfaite et permet au pendule d'osciller dans le plan (Oxy). La position de la tige est repérée par la position θ.

La continuité du circuit est assurée par un balai (qui glisse sans frottement) mettant la tige en contact en A avec un guide circulaire conducteur, lui-même relié à un condensateur de capacité C. On néglige toute résistance électrique du circuit.

L'intensité i est orientée dans le sens indiqué ci-dessous. Le pendule est placé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u}_z$.



1) Exprimer le flux ϕ du champ magnétique à travers le circuit notamment en fonction de ϕ_0, le flux lorsque $\theta = 0$.

2) Appliquer la loi des mailles à ce circuit afin d'établir une équation reliant θ et i (ou leurs dérivés).

3) Montrer que l'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_1^2 \sin(\theta) = 0$$

où ω_1 est une constante à exprimer en fonction des données du problème.

Correction

Correction

1) Notons S_0 la surface du circuit lorsque $\theta = 0$. On en déduit la surface $S(t)$:

$$S(t) = S_0 - \frac{\theta \ell^2}{2}$$

Et le vecteur surface $\overrightarrow{S}$ est orienté selon $+\overrightarrow{u_z}$. On en déduit le flux :

$$\boxed{\phi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = \phi_0 - \frac{\theta B \ell^2}{2}}$$

2) Loi de Faraday + loi des mailles :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{\theta} B \ell^2}{2} \quad \text{et} \quad e = u_C \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = C\,\frac{du_C}{dt} = \frac{\ddot{\theta} C B \ell^2}{2}}$$

3) La barre est soumise à son poids (qui s'applique au point A, car pendule simple), à la force de Laplace (qui s'applique au centre G du câble métallique) et à la force de la Liaison pivot (qui s'applique en O, donc de moment nul).

Moment du poids :

$$\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{P}\right) = (\ell\,\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_x}) \cdot \overrightarrow{u_z} = -mg\ell\,\text{sin}(\theta)$$

Moment de la force de Laplace :

$$\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_L}\right) = \left(\frac{\ell}{2}\,\overrightarrow{u_r} \wedge iaB\,\overrightarrow{u_\theta}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = -\frac{i\ell^2 B}{2}$$

On applique le TMC sur le pendule :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\,\text{sin}(\theta) - \frac{i\ell^2 B}{2}$$

On injecte l'équation électrique :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\,\text{sin}(\theta) - \frac{CB^2\ell^4}{4}\,\ddot{\theta}$$

On en déduit bien :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_1^2\,\text{sin}(\theta) = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{mg\ell}{m\ell^2 + \dfrac{CB^2\ell^4}{4}}}}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com