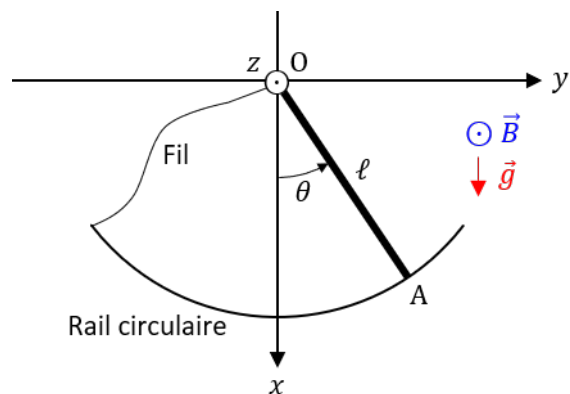


## Pendule pesant avec induction

On considère un pendule rigide  $OA$ , homogène, de masse  $m$  et de longueur  $\ell$ , libre de tourner autour d'un axe horizontal ( $Oz$ ). On note  $J$  son moment d'inertie par rapport à cet axe. Le pendule est repéré par l'angle  $\theta$  qu'il forme avec la verticale. La tige est en contact en  $A$  avec un rail métallique ce qui forme un circuit électrique. L'ensemble est placé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . On ne tient compte que de la résistance  $R$  de la tige, et on néglige celles du rail et du fil servant à fermer le circuit seront négligées. On néglige l'auto-induction.

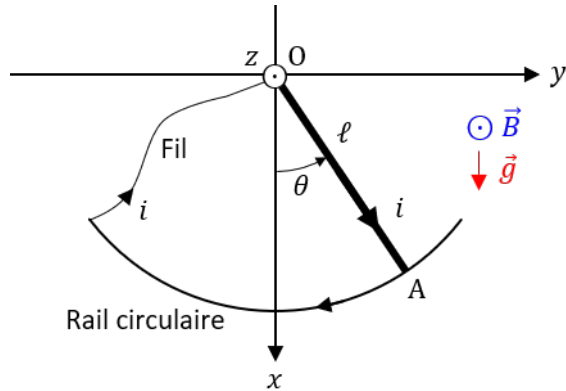


- 1) Exprimer le flux  $\phi$  du champ magnétique à travers le circuit notamment en fonction de  $\phi_0$ , le flux lorsque  $\theta = 0$ .
- 2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$  avec la verticale.
- 3) On suppose les oscillations de petite amplitude. Montrer que si le champ magnétique est suffisamment fort, la tige atteint sa position d'équilibre sans osciller.
- 4) Établir un bilan d'énergie et l'analyser qualitativement.



## Correction

1) Il faut orienter le circuit.



Notons  $S_0$  la surface du circuit lorsque  $\theta = 0$ . On en déduit la surface  $S(t)$  :

$$S(t) = S_0 + \frac{\theta \ell^2}{2}$$

Et le vecteur surface  $\vec{S}$  est orienté selon  $-\vec{u}_z$ . On en déduit le flux :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \phi_0 - \frac{\theta B \ell^2}{2}$$

2) Loi de Faraday + loi des mailles :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{\theta} B \ell^2}{2} = Ri$$

La barre est soumise à son poids, à la force de Laplace et à la force de la Liaison pivot. Le poids et la force de Laplace s'appliquent en  $G$ , le centre de la barre. Le moment de la liaison pivot est nul car la force s'applique en  $O$ .

Moment du poids :

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = \left( \frac{\ell}{2} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_x \right) \cdot \vec{u}_z = -\frac{mg\ell}{2} \sin(\theta)$$

Moment de la force de Laplace :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_L) = \left( \frac{\ell}{2} \vec{u}_r \wedge iaB \vec{u}_\theta \right) \cdot \vec{u}_z = -\frac{i\ell^2 B}{2}$$

On applique le TMC sur le pendule :

$$J\ddot{\theta} = -\frac{mg\ell}{2} \sin(\theta) - \frac{i\ell^2 B}{2}$$

On injecte l'équation électrique :

$$J\ddot{\theta} = -\frac{mg\ell}{2} \sin(\theta) - \frac{\ell^4 B^2}{4R} \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\ell^4 B^2}{4RJ} \dot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J} \sin(\theta) = 0}$$

3) Dans le cas des petites oscillations, on reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti.

On identifie alors :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{2J}} \quad \text{et} \quad Q = \omega_0 \frac{4RJ}{\ell^4 B^2}$$

Pour ne pas observer d'oscillations, il faut que :

$$Q \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{B \geq \sqrt{\omega_0 \frac{8RJ}{\ell^4}}}$$

4) On multiplie l'équation électrique par  $i$  et l'équation mécanique par  $\omega$ . On a :

$$\begin{cases} \frac{\omega i B \ell^2}{2} = Ri^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \omega^2 - \frac{mg\ell}{2} \cos(\theta) \right) = -\frac{i\omega \ell^2 B}{2} \end{cases}$$

On combine les deux équations :

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{1}{2} J \omega^2}_{\mathcal{E}_c} - \underbrace{\frac{mg\ell}{2} \cos(\theta)}_{\mathcal{E}_{pp}} \right) = -\underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{Joule}}}$$

La dérivée de l'énergie mécanique est négative : le système perd de l'énergie à cause de l'effet Joule.