

Oscillations d'un pont

Dans un modèle couramment utilisé, on peut assimiler une passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur b selon \vec{u}_z et de hauteur h selon \vec{u}_y . Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire $y(x, t) \ll h$ et b , on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde.

On considère une passerelle de section S , de masse volumique ρ , de module d'Young E et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe \vec{u}_z est $I = bh^3/12$. L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

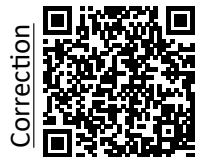
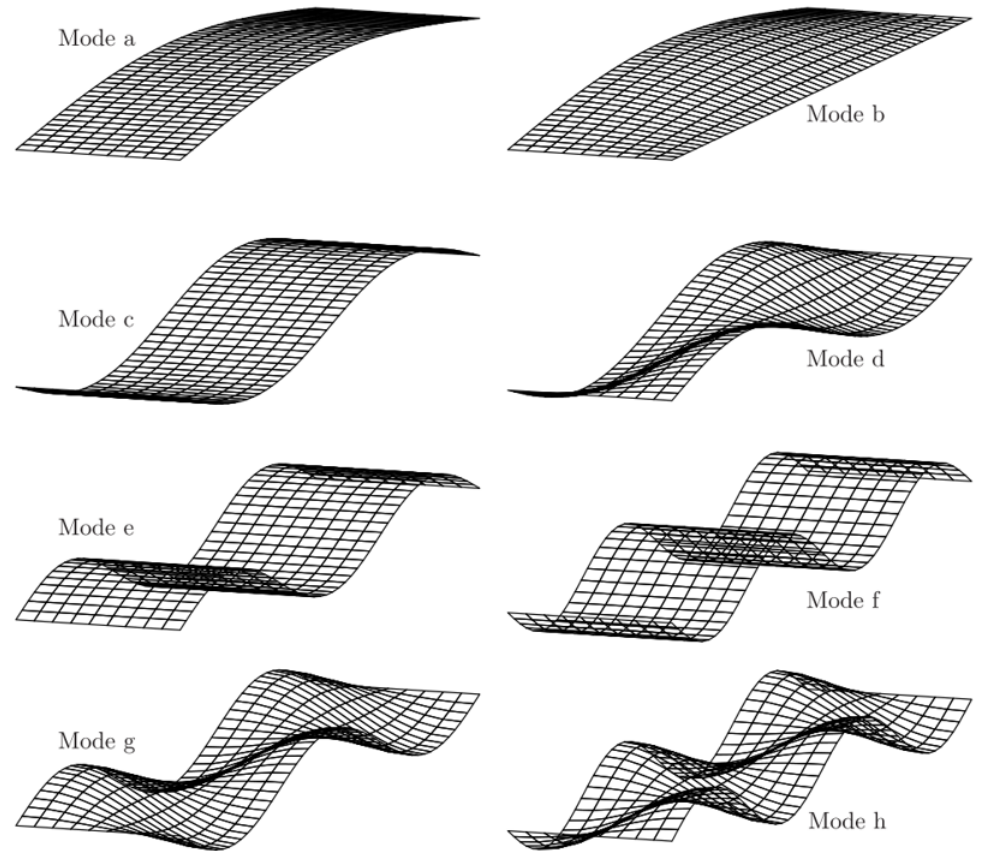
- 1) On cherche des solutions sous la forme $y(x, t) = f(x) \times g(t)$. De quel type d'onde s'agit-il ? Sous quelles hypothèses de telles ondes apparaissent-elles dans ce genre de structure ?
- 2) Déterminer les équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$. On introduira une constante K commune aux deux équations. Quelle doit être le signe de K pour que $g(t)$ soit harmonique de pulsation ω ?
- 3) Justifier précisément que l'on puisse écrire :

$$f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x)$$

où A, B, C et D sont des constantes d'intégration. On précisera l'expression de β en fonction des données du problème.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur L en appui simple à ses extrémités. Les conditions aux limites sont donc : $f(0) = f(L) = 0$ et $f''(0) = f''(L) = 0$.

- 4) Déterminer les pulsations propres ω_n de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de L, E, I, ρ, S et d'un entier n caractérisant le mode.
- 5) Différents modes de vibrations d'une passerelle ont été représentés au dos de la feuille. Quels sont ceux correspondants à l'étude proposée dans cette section ? Identifier de façon argumentée pour chacun de ces modes, l'entier n le caractérisant.



Correction

Correction

1) Il s'agit d'ondes stationnaires. Les solutions de ce type correspondent à des systèmes de taille finie avec des conditions aux limites de type grandeur constante (nulle le plus souvent).

2) Découpons les variables :

$$\rho S \cdot f(x) g''(t) + IE \cdot f''''(x) \times g(t) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\rho S}{IE} \frac{g''(t)}{g(t)}}_{\text{fonction de } t} = \underbrace{-\frac{f''''(x)}{f(x)}}_{\text{fonction de } x} = K$$

Une fonction de t ne peut être égale à une fonction de x que si elles sont constantes. On pose K cette constante.

$$\frac{d^2 g}{dt^2} - \frac{\rho S K}{IE} g(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 g}{dt^2} + \omega^2 g(t) = 0 \text{ avec : } \omega = \sqrt{-\frac{IEK}{\rho S}}}$$

La fonction g est un oscillateur harmonique si $K < 0$. On peut alors poser ω la pulsation propre de l'oscillateur.

3) Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle est :

$$r^4 = -K = \frac{\rho S \omega^2}{IE} = \beta^4 \text{ avec : } \boxed{\beta = \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE}\right)^{1/4}} \Rightarrow \begin{cases} r_{1,2} = \pm \beta \\ r_{3,4} = \pm i\beta \end{cases}$$

la solution générale s'écrit donc :

$$f(x) = \sum_{k=1}^4 A_k e^{r_k x}$$

En combinant les deux exponentielles réelles on peut former ch et sh, et en combinant les deux exponentielles complexes on peut former cos et sin.

En effet,

$$\begin{aligned} C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x) &= \frac{C}{2} (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) + \frac{D}{2} (e^{\beta x} - e^{-\beta x}) \\ &= \underbrace{\frac{C+D}{2}}_{A_1} e^{i\beta x} + \underbrace{\frac{C-D}{2}}_{A_2} e^{-i\beta x} \end{aligned}$$

de même,

$$\begin{aligned} A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) &= \frac{A}{2} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) + \frac{B}{2} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) \\ &= \underbrace{\frac{A+B}{2}}_{A_3} e^{i\beta x} + \underbrace{\frac{A-B}{2}}_{A_4} e^{-i\beta x} \end{aligned}$$

On obtient alors la solution donnée.

4) Les quatre équations aux limites donnent :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow A + C = 0 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow A - C = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = C = 0}$$

et,

$$\begin{cases} f(L) = 0 \Rightarrow B \sin(\beta L) + D \operatorname{sh}(\beta L) = 0 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow -B \sin(\beta L) + D \operatorname{sh}(\beta L) = 0 \end{cases}$$

donc :

$$2B \sin(\beta L) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta_n L = n\pi} \text{ et } 2D \operatorname{sh}(\beta L) = 0 \Rightarrow \boxed{D = 0}$$

Avec l'expression de β on en déduit :

$$\boxed{\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{IE}{\rho S}}}$$

5) On doit avoir aux extrémités une ligne horizontale ce qui est toujours le cas, et donc un nœud aux extrémités. La dérivée seconde nulle aux extrémités est également vérifiée dans tous les cas. On détermine n en comptant les ventres. Les cas qui ne correspondent pas à l'étude sont ceux de la déformation à deux dimensions de la plaque $f(x, z)$.

Mode	a	b	c	d	e	f	g	h
$f(x)$	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Oui	Non	Non
n	1		2		3	4		