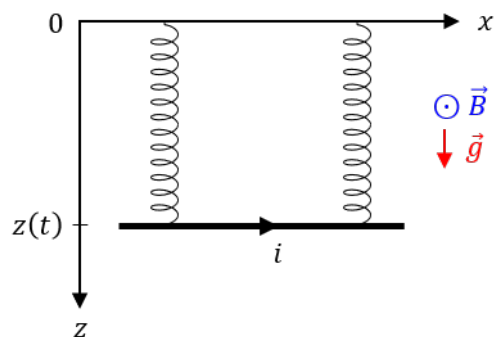


## Oscillateur amorti par induction

Soit une barre de masse  $m$ , suspendue à deux ressorts identiques de raideur  $k$ , longueur à vide  $\ell_0$  et séparés d'une distance  $a$ . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . La barre, les ressorts et le support forment un circuit fermé, de résistance totale  $R$ .



- 1) Établir l'équation du mouvement sur la position  $z(t)$  de la barre.
- 2) En déduire que si  $B$  est suffisamment grand, la barre retourne à sa position d'équilibre sans osciller.
- 3) Réaliser et interpréter le bilan de puissance.

On introduit le facteur d'amortissement  $\lambda$  et la pseudo-pulsation  $\Omega$ . On se place en régime pseudo-périodique.

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

- 4) À l'instant  $t = 0$  on écarte la barre de sa position d'équilibre d'une distance  $b$  et on lâche avec une vitesse nulle. Déterminer  $z(t)$  et  $i(t)$ .



Correction

## Correction

1) Le flux magnétique vaut :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \vec{u}_y \cdot a z \vec{u}_y = a B z$$

Loi de Faraday + loi des mailles :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \boxed{-aB\dot{z} = Ri}$$

La barre est soumise à son poids, à la force de Laplace et aux deux forces de rappel des ressorts. On applique le PFD sur la barre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$m\ddot{z} = mg + iaB - 2k(z - \ell_0)$$

On injecte l'équation électrique :

$$m\ddot{z} = mg - \frac{a^2 B^2}{R} \dot{z} - 2k(z - \ell_0)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti. On identifie alors :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{eq} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \\ Q = \frac{R\sqrt{2km}}{a^2 B^2} \\ z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{2k} \end{cases}$$

2) Pour un retour à l'équilibre sans oscillation, il faut que :

$$Q \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{B \geq \sqrt{\frac{2R\sqrt{2km}}{a^2}}}$$

3) On multiplie l'équation électrique par  $i$  et l'équation mécanique par  $\dot{z}$ . On a :

$$-aBi\dot{z} = Ri^2 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz + k(z - \ell_0)^2 \right) = i\dot{z}aB$$

On combine les deux équations :

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{z}^2}_{\mathcal{E}_c} - \underbrace{mgz}_{\mathcal{E}_{pp}} + \underbrace{k(z - \ell_0)^2}_{\mathcal{E}_{pe}} \right) = - \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{joule}}$$

La dérivée de l'énergie mécanique est négative, donc cette dernière décroît du fait des pertes par effet Joule.

4) Solution générale :

$$z(t) = e^{-\lambda t} \left[ A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \right] + z_{eq}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} z(0) = A + z_{eq} = b + z_{eq} \Rightarrow \boxed{A = b} \\ \dot{z}(0) = -\lambda A + \Omega B = 0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{\lambda b}{\Omega}} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{z(t) = b e^{-\lambda t} \left[ \cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right] + z_{eq}}$$

Avec l'équation électrique, on en déduit (après calcul de la dérivée et simplifications) :

$$\boxed{i(t) = -\frac{aB}{R} \dot{z} = \frac{abB\omega_0^2}{R\Omega} e^{-\lambda t} \sin(\Omega t)}$$