

## Onde longitudinale dans les plasmas

---

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense.

On pose :

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kr)} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - kr)}$$

On suppose que la densité volumique de charges  $\rho$  non nulle.

- 1) Établir l'équation du mouvement d'un électron de masse  $m$  et de charge  $-e$ , associé à la densité  $n$ , en faisant les approximations nécessaires. Montrer que l'on peut définir une conductivité complexe  $\underline{\gamma}$  pour le plasma.
- 2) À l'aide des équations de Maxwell et de l'équation locale de conservation de la charge, établir une nouvelle expression de  $\underline{\gamma}$  en fonction de  $\omega$  et  $\varepsilon_0$ .
- 3) Déterminer la pulsation  $\omega$  de cette onde.
- 4) Montrer que  $\vec{B} = \vec{0}$ . En déduire la direction de  $\vec{k}$ . Quel nom donne-t-on à ce type de propagation ?



## Correction

1) On applique le PFD sur un électron, dans le référentiel des charges positives supposées fixes, le référentiel est donc supposé galiléen. On suppose pour le moment que l'électron est non-relativiste ( $v \ll c$ ), ce qui permet de négliger la partie magnétique de la force de Lorentz. Cette dernière hypothèse est en réalité inutile car, comme on le verra dans la dernière question, le champ magnétique et donc la partie magnétique de la force de Lorentz sont nuls.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \Rightarrow i\omega m \vec{v} = -e\vec{E}$$

Or, par définition de la densité volumique de courant  $\vec{j}$  et de la conductivité  $\gamma$ , on montre que :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = -\frac{ine^2}{m\omega}\vec{E} \Rightarrow \boxed{\gamma = -\frac{ine^2}{m\omega}}$$

2) Équation de conservation de la masse en complexe :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0 \Rightarrow i\omega \rho + \text{div}(\vec{j}) = 0$$

En introduisant  $\gamma$  et champ l'équation de Maxwell-Gauss :

$$i\omega \rho + \gamma \text{div}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow i\omega \rho + \frac{\gamma \rho}{\varepsilon_0} = 0$$

On en déduit :

$$\left(i\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)\rho = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = -i\omega\varepsilon_0}$$

3) On égalise ces deux expressions :

$$-i\omega\varepsilon_0 = -\frac{ine^2}{m\omega} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} = \omega_p}$$

La pulsation de cette onde est nécessairement égale à la pulsation plasma.

4) L'équation de Maxwell-flux donne :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

L'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0(\gamma + i\omega\varepsilon_0)\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Le champ magnétique est donc simultanément orthogonal et colinéaire à  $\vec{k}$ . Seul le vecteur nul a cette propriété. Donc :  $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$ .

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0} \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

Le vecteur  $\vec{k}$  est donc colinéaire au champ électrique. Il s'agit d'une onde longitudinale (cf. titre de l'exercice !).