Onde électromagnétique plane progressive

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est :

$$\overrightarrow{E} = E_x \overrightarrow{u}_x + E_y \overrightarrow{u}_y \quad \text{avec :} \quad \underline{E_x} = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{k}{3}\left[2x + 2y + z\right]\right)\right)$$

1) Déterminer l'expression du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$.

2) Décrire les surfaces d'onde.

3) Exprimer E_y en fonction de E_x.

4) Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ relatif à cette onde.

5) Déterminer la densité moyenne d'énergie électromagnétique $\langle u_{em} \rangle$ relative à cette onde.

6) Déterminer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle$ relatif à cette onde. Quel est le lien entre $\langle u_{em} \rangle$ et $\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle$?

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) On rappelle que l'exponentielle est de la forme, pour une onde harmonique :

$$\exp\left(i\left(\omega t-\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\right)\quad \text{avec :}\quad \overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\overrightarrow{k}=\frac{k}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}}$$

Il s'agit bien d'un vecteur de norme k.

2) L'onde se propage selon le vecteur $\overrightarrow{k}$ constant. Les surfaces d'onde sont les surfaces en tout point orthogonales à $\overrightarrow{k}$. Il s'agit donc des plans orthogonaux à $\overrightarrow{k}$.

3) L'équation de Maxwell-Gauss (dans le vide, $\rho=0$) donne :

$$\text{div}\left(\overrightarrow{E}\right)=0\quad\Rightarrow\quad 0=-i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{E}}=-\frac{ik\underline{E_x}}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\?\\0\end{pmatrix}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\overrightarrow{E}=E_x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{E_y=-E_x}$$

4) Maxwell-Faraday donne :

$$-i\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{E}}=-i\omega\overrightarrow{\underline{B}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\overrightarrow{B}=\frac{\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{E}}{\omega}=\frac{E_x}{3c}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}}$$

5) Attention pour le calcul, il faut au choix le faire en réel ou en complexe :

$$\langle\overrightarrow{E}^2_{\text{réel}}\rangle=\frac{\overrightarrow{\underline{E}}\cdot\overrightarrow{\underline{E}}^*}{2}$$

Ici, avec la notation complexe :

$$\langle u_{em}\rangle=\frac{\varepsilon_0}{4}\overrightarrow{\underline{E}}\cdot\overrightarrow{\underline{E}}^*+\frac{1}{4\mu_0}\overrightarrow{\underline{B}}\cdot\overrightarrow{\underline{B}}^*=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}+\frac{E_0^2}{2\mu_0c^2}=\boxed{\varepsilon_0E_0^2}$$

6) La valeur moyenne du vecteur de Poynting (toujours en notation complexe) :

$$\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle=\frac{1}{2\mu_0}\mathcal{R}e\left(\overrightarrow{\underline{E}}\wedge\overrightarrow{\underline{B}}^*\right)=\frac{E_0^2}{3\mu_0c}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle=\frac{E_0^2}{\mu_0c}\overrightarrow{u}=c\,\langle u_{em}\rangle\overrightarrow{u}\quad\text{avec :}\quad\overrightarrow{k}=k\overrightarrow{u}}$$

$\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{k}$.

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com