

## Onde électromagnétique cylindrique

On étudie une onde électromagnétique cylindrique, émise par des sources situées le long d'un axe ( $Oz$ ). En coordonnées cylindriques, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = E(r) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_z$$

- 1) Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  associé à ce champ électrique. Commenter son expression.
- 2) Quelle est la valeur moyenne du vecteur de Poynting ? En déduire la puissance moyenne  $\mathcal{P}$  rayonnée à travers un cylindre d'axe ( $Oz$ ) de hauteur  $h$ .
- 3) Montrer que  $E(r)$  se met sous la forme :  $E(r) = E_0 r^\alpha$  où  $\alpha$  est une constante à déterminer.
- 4) Pour  $r \rightarrow \infty$ , donner l'expression des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  et décrire la structure de l'onde dans cette zone
- 5) En déduire la relation de dispersion reliant  $k$  et  $\omega$  pour  $r \rightarrow \infty$ .

Formulaire : en coordonnées cylindriques

$$\text{rot}(A) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$



## Correction

1) On cherche  $\vec{B}(M, t)$  sous la forme :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}(r) e^{i(\omega t - kr)}$$

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial E_z}{\partial r} \vec{u}_\theta = -i\omega \vec{B}$$

On en déduit :

$$\vec{B} = -\left[ \frac{k}{\omega} E(r) + \frac{i}{\omega} E'(r) \right] e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta$$

2) On peut calculer la valeur moyenne de deux manières (avec les champs réels ou complexes) :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left[ \vec{E} \wedge \vec{B}^* \right]$$

Travaillons avec les champs complexes.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left[ E(r) \cdot \left( \frac{k}{\omega} E(r) - \frac{i}{\omega} E'(r) \right) \right] \vec{u}_z = \frac{k}{2\mu_0 \omega} E^2(r) \vec{u}_z$$

On en déduit la puissance moyenne  $\mathcal{P}$  rayonnée à travers un cylindre d'axe ( $Oz$ ) de hauteur  $h$ .

$$\mathcal{P} = \oiint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$$

Sur les surfaces du dessus et du dessous du cylindre,  $\vec{\Pi} \perp d\vec{S}$  donc le produit scalaire est nul. Il ne reste que l'intégrale sur la surface latérale où :  $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$ . Le champ  $E(r)$  une constante pour l'intégrale, il peut donc en sortir. On obtient :

$$\mathcal{P} = \frac{k}{2\mu_0 \omega} E^2(r) \cdot 2\pi r h$$

3) Cette puissance est constante (ne dépend pas de  $r$ ) car il n'y a pas de pertes dans notre modélisation. Donc :

$$E(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

4) Le champ électrique n'est pas modifié (il n'y a rien à simplifier...) :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{E_0}{\sqrt{r}} e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_z$$

Le champ magnétique se simplifie pour  $r \rightarrow \infty$  :

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{\sqrt{r}} \left[ \frac{k}{\omega} - \frac{i}{2\omega r} \right] e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta \simeq -\frac{k E_0}{\omega \sqrt{r}} e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta$$

5) On remarque donc que, pour  $r \rightarrow \infty$  :

$$\vec{B} = \frac{k \vec{u}_r \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Il s'agit de la structure d'une onde plane.