Neige artificielle

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide supposées sphériques de rayon $R = 0,2$ mm d'eau liquide à $T_i = 10$ °C dans l'air ambiant à la température $T_e = -15$ °C.

À l'interface eau/air, le flux thermique $d\phi$ à travers une surface dS dans le sens de la normale extérieure, est donné par la loi :

$$d\phi = h\left(T(t) - T_e\right)\,dS$$

Données :

- Coefficient conducto-convectif $h = 65$ W·m^{-2}·K^{-1}
- Chaleur latente massique de fusion $\ell_{fus} = 333$ kJ·kg^{-1}
- Capacité thermique massique de l'eau liquide $c_\ell = 4,2$ kJ·kg^{-1}·K^{-1}
- Capacité thermique massique de l'eau solide $c_s = 2,1$ kJ·kg^{-1}·K^{-1}
- Masse volumique de l'eau liquide $\rho = 1,0$ kg·L^{-1}
- Masse volumique de l'eau solide $\rho_s = 0,9$ kg·L^{-1}

1) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la température de la goutte $T(t)$.

2) Déterminer le temps t_0 mis par la goutte d'eau liquide pour atteindre la température de surfusion $T(t_0) = -5$ °C.

Lorsque la goutte a atteint la température de -5 °C, il y a rupture de la surfusion : la température remonte brutalement à 0 °C et la goutte est partiellement solidifiée (phénomène également brutal).

3) Moyennant des hypothèses que vous expliciterez, calculer la fraction x de liquide restant à solidifier après la rupture de la surfusion.

4) Calculer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide.

Correction

Correction

1) Système : {Goutte}. Sa variation infinitésimale d'enthalpie vaut :

$$dH = c_\ell \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot dT$$

De plus, la transformation est monobare (dans l'atmosphère à pression constante), donc le premier principe version enthalpique donne :

$$dH = -h\left(T(t) - T_e\right) \cdot 4\pi R^2 \cdot dt$$

Le signe « $-$ » vient du fait qu'un flux dans le sens de la normale extérieure correspond à un flux sortant de la goutte. Or il faut mettre dans le premier principe uniquement des énergies algébriquement reçue par le système.

En égalant les deux expressions, il vient :

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_e}{\tau}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau = \frac{\rho c_\ell R}{3h}}$$

2) La solution de cette équation différentielle est :

$$T(t) = T_e + \left(T_i - T_e\right)\, e^{-t/\tau}$$

On isole le temps t_0 :

$$\boxed{t_0 = \tau \ln\left(\frac{T_e - T_i}{T_e - T(t_0)}\right) = 4,0 \text{ s}}$$

3) On suppose la transformation adiabatique car brutale (les échanges de chaleur n'ont pas le temps de ce faire). La goutte subit les transformations suivantes :

$[1]$ l'eau liquide passe de -5 °C à 0 °C (on note dans la suite $\Delta T = 5$ °C la variation de température) ;

$[2]$ une masse $(1-x)\,m$ se solidifie (avec m la masse totale de la goutte).

Le premier principe donne :

$$\Delta H = 0 = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

Avec :

$$\Delta H_1 = c_\ell m \Delta T \quad \text{et} \quad \Delta H_2 = -\left(1-x\right) m \ell_{fus}$$

Ainsi,

$$\boxed{x = 1 - \frac{c_\ell \Delta T}{\ell_{fus}} = 94\,\%}$$

4) On applique le premier principe enthalpique entre l'état précédent et l'état où toute la goutte s'est solidifiée. Il reste donc une masse xm à solidifier.

$$\Delta H = -xm\ell_{fus} = -hS\left(T_{fus} - T_e\right)\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{x\rho R \ell_{fus}}{3h\left(T_{fus} - T_e\right)} = 21 \text{ s}}$$