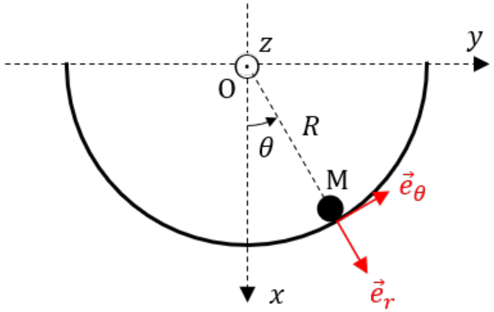
Mouvement sur un guide circulaire

On étudie le mouvement d'un point M à se déplacer sur un support circulaire de centre O et de rayon R. On repère la position de M avec l'angle θ.
On prend en compte les frottements fluides modélisés par le force : $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$.



1) Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O.

2) Exprimer le moment des forces par rapport à O.

3) Établir l'équation différentielle du mouvement par application du TMC. Que devient cette équation aux petits angles ? Identifier une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) La trajectoire est circulaire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

On en déduit le moment cinétique :

$$\boxed{\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}}$$

2) Réaction normale du support :

$$\overrightarrow{N} = -N\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{M}_O\left(\overrightarrow{N}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{N} = \overrightarrow{0}}$$

Poids :

$$\overrightarrow{P} = mg\left(\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{M}_O\left(\overrightarrow{P}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = -Rmg\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_z}}$$

Frottements :

$$\overrightarrow{f} = -\alpha a\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{M}_O\left(\overrightarrow{f}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f} = -\alpha R^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}}$$

3) On applique le TMC que l'on projette sur $\overrightarrow{u_z}$:

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum \mathcal{M}_O \quad \Rightarrow \quad mR^2\ddot{\theta} = -Rmg\sin(\theta) - \alpha R^2\dot{\theta}$$

Après simplifications :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\sin(\theta) = 0}$$

Aux petits angles (DL à l'ordre 1), l'équation devient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\,\dot{\theta} + \frac{g}{R}\,\theta = 0}$$

Il s'agit un oscillateur amorti. On rappelle la forme canonique de l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$$

On identifie donc :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{R}}}$$