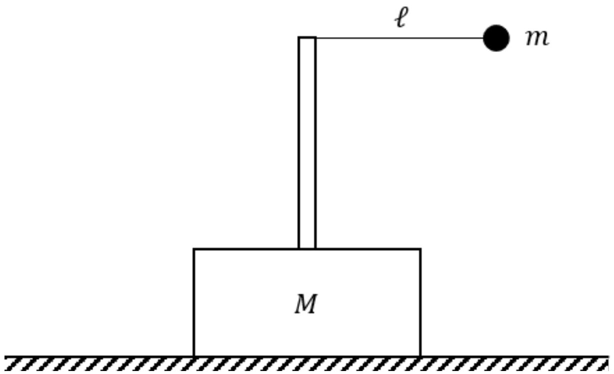
Mouvement d'un pendule

On lâche la bille de masse m à l'horizontale sans vitesse initiale. La corde de longueur ℓ est inextensible.



On supposera la liaison parfaite entre la corde et la barre verticale. On note f le coefficient de frottement statique sur le sol et on néglige les masses de la corde et de la barre verticale.

1) Donner l'expression de la norme T de la force de tension subie la masse m en fonction de l'angle θ que fait le pendule avec la verticale et de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

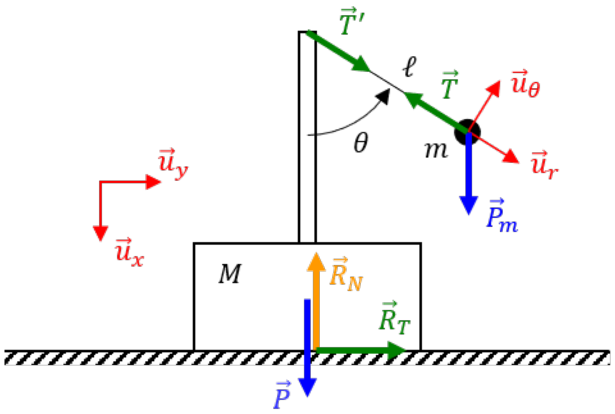
2) En utilisant le fait que le mouvement du pendule est conservatif, en déduire T en fonction uniquement de θ. Donner ensuite la norme T' de la force de tension subie par le sommet de la tige en fonction de l'angle θ.

3) En déduire l'équation permettant de vérifier la condition pour que M se mette à glisser.

Correction

Correction

1) Notations :



On rappelle l'accélération pour un mouvement circulaire.

$$\overrightarrow{OM} = \ell\,\vec{u}_r \quad\Rightarrow\quad \vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad\Rightarrow\quad \vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On applique le PFD sur le pendule :

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos(\theta) \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{T = mg\cos(\theta) + m\ell\dot{\theta}^2}$$

2) Par conservation de l'énergie mécanique au cours du mouvement :

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}m\left(\ell\dot{\theta}\right)^2 - mg\ell\cos(\theta) = 0$$

On injecte cette équation dans celle de la question précédente pour faire disparaître $\dot{\theta}$.

$$T = mg\cos(\theta) + m\ell\dot{\theta}^2 = 3mg\cos(\theta)$$

PFD sur le fil sans de masse négligeable :

$$0 = T' - T \quad\Rightarrow\quad \boxed{T' = 3mg\cos(\theta)}$$

3) La masse M subit la réaction du support, son poids et la tension T'.

$$\begin{cases} \vec{P} = Mg\,\vec{u}_x \\ \vec{R}_N = -R_N\,\vec{u}_x \\ \vec{R}_T = R_T\,\vec{u}_y \\ \vec{T'} = 3mg\cos(\theta)\,\vec{u}_r = 3mg\cos(\theta)\left(\cos(\theta)\,\vec{u}_x + \sin(\theta)\,\vec{u}_y\right) \end{cases}$$

On suppose que la masse M est immobile. Le PFD donne : On applique le PFD :

$$\begin{cases} 0 = Mg - R_N + 3mg\cos^2(\theta) \\ 0 = R_T + 3mg\cos(\theta)\sin(\theta) = R_T + \dfrac{3}{2}mg\sin(2\theta) \end{cases}$$

La masse M se met à glisser dès que :

$$|R_T| = fR_N \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{2}mg\,|\sin(2\theta)| = f\left(Mg + 3mg\cos^2(\theta)\right)$$

Il faut donc résoudre l'angle θ qui vérifie l'équation :

$$\boxed{\left|\sin(2\theta)\right| = 2f\left(\frac{M}{3m} + \cos^2(\theta)\right)}$$