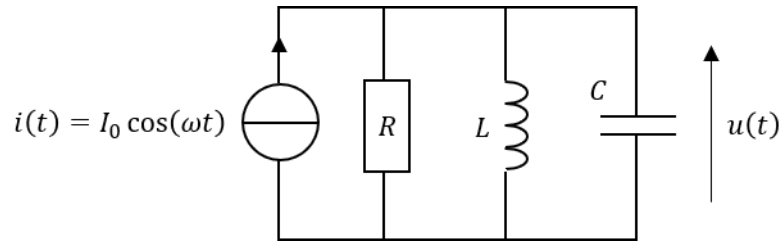


## Modélisation d'une antenne

L'antenne d'un émetteur est modélisée par un circuit électrique composé de l'association en parallèle d'une résistance  $R$ , d'une bobine d'inductance  $L$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . Le composant qui alimente l'antenne se comporte comme une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps :  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ .

On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension  $u$  aux bornes de l'antenne dépend de  $\omega$ .



1) Déterminer l'impédance complexe équivalente  $Z_{eq}$  de l'antenne. La mettre sous la forme canonique :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{Z_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

où  $Z_0$ ,  $Q$  et  $\omega_0$  sont à exprimer en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

2) En déduire l'amplitude complexe de la tension  $\underline{U}_m$  de  $u(t)$  en fonction de  $\omega$ ,  $I_0$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

3) Pour quelle pulsation  $\omega_{res}$  l'amplitude réelle  $U_m$  de  $u(t)$  prend-elle sa valeur maximale, notée  $U_{max}$  ?

4) Représenter le graphe donnant  $U_m/U_{max}$  en fonction de la pulsation réduite  $x$ .

On se place dans le cas  $R = 37 \Omega$ ,  $L = 12 \text{ nH}$  et  $C = 0,23 \text{ nF}$ .

5) Définir puis déterminer la largeur de la bande passante. Interpréter sa dépendance en  $R$ .

6) Quel est le déphasage entre  $u(t)$  et  $i(t)$  ? Comment varie-t-il avec la pulsation réduite ?



## Correction

1) On a trois dipôles en dérivation.

$$\underline{Z}_{eq} = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)^{-1} \Rightarrow \boxed{\underline{Z}_{eq} = \frac{R}{1 + j \left( \omega RC - \frac{R}{\omega L} \right)}}$$

On en déduit :

$$\boxed{Z_0 = R} \quad \text{et} \quad \frac{Q}{\omega_0} = \omega RC \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{\omega L}$$

En combinant les deux dernières relations, il vient :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

2) Ainsi, par définition :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}_{eq} \times \underline{i}(t) \Rightarrow \boxed{\underline{U}_m = \frac{RI_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}}$$

3) On en déduit :

$$U_m = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

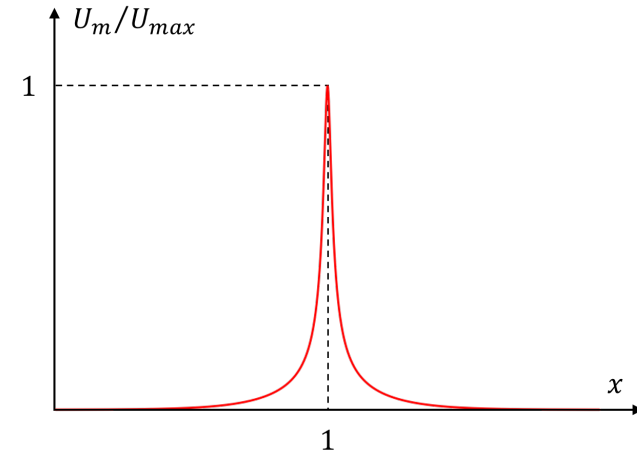
$U_m$  est maximal quand son dénominateur est minimal, donc quand le second terme est nul :

$$\frac{\omega_{res}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{res}} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{res} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Pour cette valeur de pulsation :

$$\boxed{U_{max} = RI_0}$$

4) Graphe.



5) Par définition, les pulsations de coupure  $x_c$  vérifient :

$$U_m(x_c) = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{RI_0}{1 + Q^2 \left( x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2} = \frac{RI_0}{\sqrt{2}}$$

Soit,

$$Q^2 \left( x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2 = 1 \Rightarrow x_c - \frac{1}{x_c} = \pm \frac{1}{Q}$$

Il s'agit de deux polynômes d'ordre 2.

$$x_c^2 \mp \frac{x_c}{Q} - 1 = 0 \Rightarrow x_c = \frac{1}{2} \left( \pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$$

Parmi les 4 solutions possibles, seules les deux positives sont les solutions recherchées :

$$x_{c,\pm} = \frac{1}{2} \left( \pm \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$$

On en déduit la largeur de la bande passante :

$$\boxed{BP(x) = x_{c,+} - x_{c,-} = \frac{1}{Q} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Plus  $R$  est grand, plus la bande-passante est petite. En effet, si  $R \rightarrow \infty$ , alors le circuit tend vers un circuit  $LC$ , c'est-à-dire un oscillateur harmonique parfait.

6) Par définition du déphasage  $\phi$  entre  $u$  et  $i$  :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z_{eq}} \times \underline{i}(t) \Rightarrow \arg(\underline{u}) = \arg(\underline{Z_{eq}}) + \arg(\underline{i}) \Rightarrow \phi = \arg(\underline{Z_{eq}})$$

Ainsi :

$$\phi = \arg(R) - \arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \arg\left(1 - jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

On en déduit le graphe :

