## Modélisation d'un écoulement contre une paroi

Dans un lit de rivière, on observe parfois des tourbillons permanents (vortex) à certains endroits, généralement près des rives formant un coin à angle droit. Des objets flottants sur l'eau ou de la mousse peuvent être piégés dans ce zones où l'eau évolue en circuit fermé.

Formulaire : en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{u}_z$$

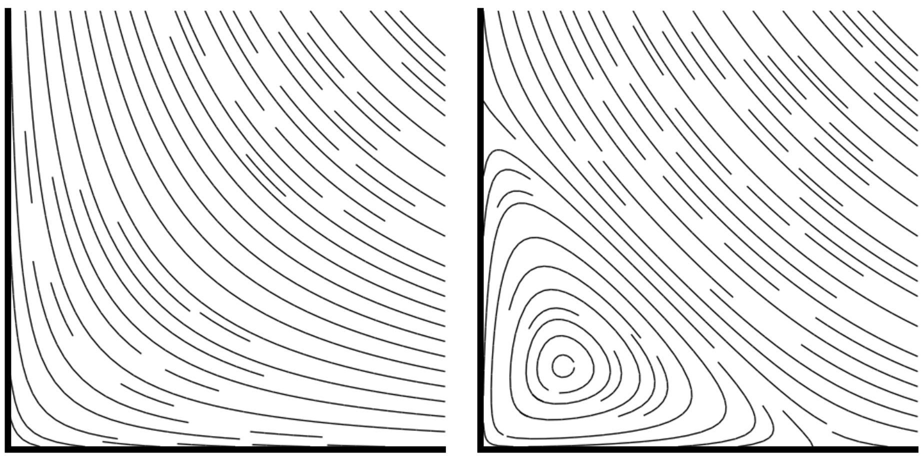
$$\text{div}\left(\vec{A}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(A) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

On étudie pour commencer un premier profil de vitesse :

$$\vec{v}_1(M,t) = -kx\vec{u}_x + ky\vec{u}_y \quad \text{avec :} \quad k > 0$$

Profils du champ de vitesse.




1) Les conditions aux limites sont-elles bien vérifiées ?

2) Ce champ de vitesses correspond-il à un écoulement incompressible ? irrotationnel ? Le cas échéant, déterminer le potentiel des vitesses.

3) Déterminer l'accélération $\vec{a}$ d'une particule de fluide.

On étudie à présent un second profil de vitesse :

$$\vec{v}_2(M,t) = -kx\left(1 - \frac{xL}{(x+y)^2}\right)\vec{u}_x + ky\left(1 - \frac{yL}{(x+y)^2}\right)\vec{u}_y$$

avec $k > 0$ et $L > 0$. On peut montrer que :

$$\text{div}(\vec{v}_2) = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}_2) = 2kL\frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}\vec{u}_z$$

4) Déterminer les coordonnées des points d'arrêts.

5) Déterminer les coordonnées du centre du vortex.

6) Montrer que loin de l'angle droit, $\vec{v}_2$ est assimilable à $\vec{v}_1$.

7) Recopier les lignes de courant en indiquant leur sens.

8) Justifier qu'une particule de fluide placée au centre du vortex tourne sur elle même sans modification de son volume.

Correction



Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

## Correction

1) Si $x = 0$, alors $\vec{v}_1 \propto \vec{u}_y$. De même, si $y = 0$, alors $\vec{v}_1 \propto -\vec{u}_x$. Dans les deux cas, le champ de vitesse est bien tangent à l'obstacle.

2) On a :

$$\text{div}(\vec{v}_1) = -k\,\frac{\partial x}{\partial x} + k\,\frac{\partial y}{\partial y} = -k + k = 0$$

L'écoulement est incompressible.

De plus, on a immédiatement :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}_1) = \vec{0}$$

L'écoulement est donc irrotationnel. On peut donc déterminer $\phi$ le potentiel des vitesses.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\phi) = \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = \frac{1}{2}k\left(y^2 - x^2\right)}$$

3) L'accélération et définie par :

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{=\vec{0}} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = -kx\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + ky\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \boxed{k^2\left(x\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y\right)}$$

4) S'il existe des points d'arrêt ($\vec{v} = \vec{0}$), ils sont nécessairement contre les parois ($x = 0$ ou $y = 0$). Il vient immédiatement que :

$$\vec{v} = \vec{0} \quad \text{avec :} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} x_1 = 0 \quad \text{et} \quad y_1 = L \\ \hline x_2 = L \quad \text{et} \quad y_2 = 0 \end{array}}$$

5) Au centre du vortex, la vitesse est nécessairement nulle.

$$1 - \frac{x_0 L}{(x_0 + y_0)^2} = 1 - \frac{y_0 L}{(x_0 + y_0)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = y_0 = \frac{L}{4}}$$

6) On pose $r = \text{max}(x, y) \gg L$. Loin du vortex :

$$(x + y)^2 \geq r^2 \gg rL \geq xL \text{ et } yL$$

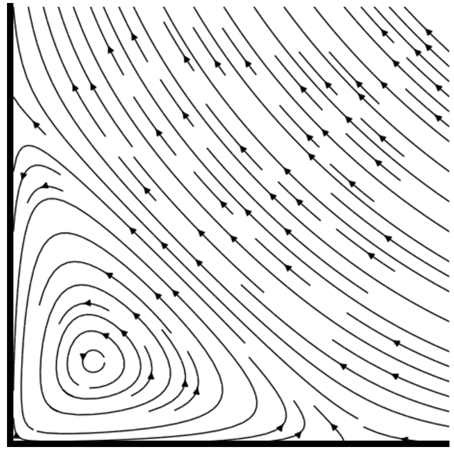
Ainsi,

$$\frac{xL}{(x+y)^2} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{yL}{(x+y)^2} \ll 1$$

On a donc bien :

$$\vec{v}_2(M,t) \simeq -kx\vec{u}_x + ky\vec{u}_y = \vec{v}_1(M,t)$$

7) Puisque $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}_2) \propto +\vec{u}_z$, les lignes de courants sont parcourues dans le sens trigonométrique.



8) Au centre du vortex $\text{div}(\vec{v}_2) = 0$ donc la particule de fluide conserve sont volume et $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}_2) = 2k\vec{u}_z \neq \vec{0}$ donc la particule de fluide tourne sur elle même dans le sens trigonométrique (HP : à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = k\vec{u}_z$).