

## Modèle de tornade

On décrit une tornade de rayon  $a$  par un écoulement incompressible à symétrie cylindrique autour de l'axe ( $Oz$ ). Le champ de vitesses est de la forme :

$$\vec{v} = v_\theta(r) \vec{u}_\theta \quad \text{avec :} \quad \text{rot}(\vec{v}) = \begin{cases} 2\omega_0 \vec{u}_z & \text{pour } r \leq a \\ \vec{0} & \text{pour } r > a \end{cases}$$

Formulaire : en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{u}_z$$

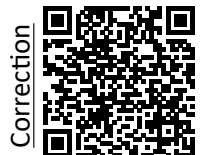
$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(A) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

- 1) L'écoulement est-il incompressible ?
- 2) Établir le profil de vitesse  $v_\theta(r)$ . À quelle distance du centre de la tornade cette vitesse est-elle maximale ?
- 3) Calculer le potentiel de l'écoulement à l'extérieur du cœur ( $r > a$ ). Quelle est la forme des équipotentielles ?
- 4) Déterminer l'accélération particulière  $\vec{a}$ . L'exprimer sous la forme :

$$\vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}}(B)$$

où  $B$  est à exprimer en fonction de  $\omega_0$ ,  $a$  et  $r$ .



## Correction

1) On a immédiatement  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  donc l'écoulement est incompressible.

2) On a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dr} \vec{u}_z = \begin{cases} 2\omega_0 \vec{u}_z & \text{pour } r \leq a \\ \vec{0} & \text{pour } r > a \end{cases}$$

Ainsi, pour  $r \leq a$  :

$$\frac{d(rv_\theta)}{dr} = 2\omega_0 r \Rightarrow rv_\theta = \omega_0 r^2 + cte' \Rightarrow v_\theta = \omega_0 r + \frac{cte'}{r}$$

Or, la vitesse ne peut pas diverger en  $r = 0$ , donc  $cte' = 0$ .

De plus, pour  $r > a$  :

$$\frac{d(rv_\theta)}{dr} = 0 \Rightarrow rv_\theta = cte \Rightarrow v_\theta = \frac{cte}{r}$$

Or par continuité de la vitesse en  $r = a$ , on a :

$$\omega_0 a = \frac{cte}{a} \Rightarrow cte = \omega_0 a^2$$

Bilan :

$$\vec{v} = \begin{cases} \omega_0 r \vec{u}_\theta & \text{pour } r \leq a \\ \frac{\omega_0 a^2}{r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r > a \end{cases}$$

La vitesse est maximale en  $r = a$ .

3) Pour  $r > a$ , on cherche  $\phi$  tel que :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \Rightarrow \frac{\omega_0 a^2}{r} = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\theta} \Rightarrow \phi = \omega_0 a^2 \theta$$

Les équipotentielles sont les courbes à  $\theta = cte$  : il s'agit de demi-droites passant par l'origine.

4) On a :

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{= \vec{0}} + \left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} = \frac{v_\theta^2}{r} \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{v_\theta^2}{r} \vec{u}_r$$

En effet,  $\vec{u}_\theta$  ne dépend que de la variable  $\theta$ , pas de la variable  $t$ .

$$\vec{u}_\theta = \cos(\theta) \vec{u}_y - \sin(\theta) \vec{u}_x$$

Bilan :

$$\vec{a} = \begin{cases} -\omega_0^2 r \vec{u}_r & \text{pour } r \leq a \\ -\frac{\omega_0^2 a^4}{r^3} \vec{u}_r & \text{pour } r > a \end{cases}$$

On a bien :

$$\vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}}(B) \quad \text{avec : } B = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega_0^2 r^2 & \text{pour } r \leq a \\ \frac{-\omega_0^2 a^4}{2r^2} & \text{pour } r > a \end{cases}$$