Modèle classique de trou noir

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogue relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposée dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine, mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle heuristique de physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un astre sphérique de masse m_0, de rayon R et de centre O. Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

Données :

- Constante universelle de gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8$ m·s^{-1}

1) Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M. Celle-ci se conserve-t-elle ?

2) Montrer que le mouvement de M est nécessairement plan. M étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

3) Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r.

4) Tracer l'allure de la courbe représentative de $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de $\mathcal{E}_m$ le point M peut échapper à l'attraction d'un astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.

5) En déduire la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre.

6) Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à c. Calculer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon minimal qu'il doit avoir pour être un trou noir.

7) Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg) et pour la Terre ($M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg). En déduire la densité minimale d'un trou noir de cette masse.

Malgré l'approche classique qui donne un résultat faux, le rayon de Schwarzschild donne un bon ordre de grandeur de la taille d'un trou noir.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Force gravitationnelle :

$$\vec{F} = -G\frac{mm_0}{r^2}\,\vec{u}_r$$

On en déduit l'énergie potentielle associée :

$$\vec{F} = -G\frac{mm_0}{r^2}\,\vec{u}_r = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\,\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_p = -G\frac{mm_0}{r}}$$

2) La force étant centrale, le moment cinétique se conserve (d'après le TMC) et donc le mouvement est dans le plan perpendiculaire au moment cinétique.
En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \end{cases}$$

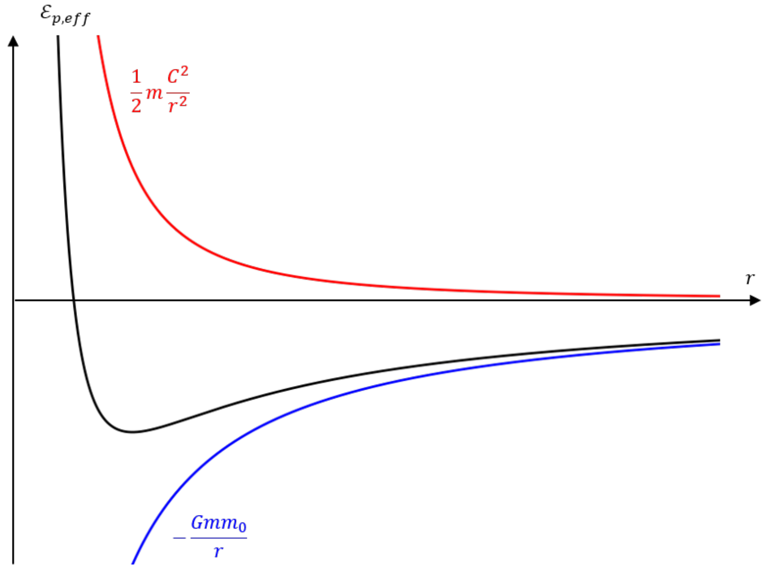
On en déduit le moment cinétique :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z = \overrightarrow{cte} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = r^2\dot{\theta} = cte}$$

3) L'énergie mécanique s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right) + \mathcal{E}_p = \boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{C}{r}\right)^2 - G\frac{mm_0}{r}}_{=\mathcal{E}_{p,eff}(r)}}$$

4) Graphe :



le point M peut échapper à l'attraction d'un astre dès lors que r peut tendre vers l'infini. Cela est possible dès que $\mathcal{E}_m \geq 0$.

5) On considère M à la surface de l'astre : $r = R$. On cherche la plus petite vitesse v_{lib} qu'il doit posséder afin de s'échapper de son attraction gravitationnelle, c'est-à-dire pour pouvoir se rendre à $r = +\infty$ avec une vitesse nulle, donc sur une trajectoire parabolique, donc avoir $\mathcal{E}_m = 0$.

$$\mathcal{E}_m = 0 = \frac{1}{2}mv_{lib}^2 - G\frac{mm_0}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{lib} = \sqrt{\frac{2Gm_0}{R}}}$$

6) Par définition du rayon de Schwarzschild :

$$c = \sqrt{\frac{2Gm_0}{R_S}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_S = \frac{2Gm_0}{c^2}}$$

7) On rappelle le lien entre la masse, le rayon et la densité pour un corps sphérique.

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Pour le soleil :

$$\boxed{R_S = \frac{2GM_S}{c^2} = 3,0\text{ km}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_S = \frac{M_S}{\frac{4}{3}\pi R_S^3} = 1,8 \cdot 10^{19}\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}}$$

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Pour la Terre :

$$\boxed{R_T = \frac{2GM_T}{c^2} = 8,9 \text{ mm}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = 6,8 \cdot 10^{35} \text{ kg·m}^{-3}}$$