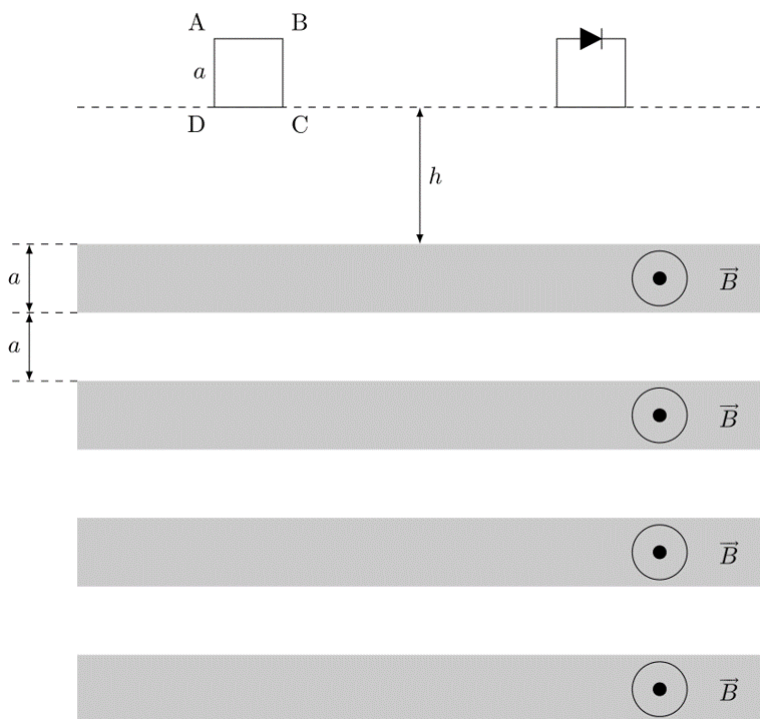


## Mille-feuille magnétique

Un cadre conducteur carré et vertical ABCD de côté  $a$ , de masse  $m$  et de résistance  $R$  tombe dans le champ de pesanteur. Il rencontre une succession de quatre zones horizontales d'épaisseur  $a$  dans lesquelles règne un champ magnétique  $\vec{B}$  horizontal, uniforme et constant. Chaque zone est séparée de ses voisines par des zones sans champ magnétique, également d'épaisseur  $a$ . L'ensemble forme ainsi une sorte de mille-feuille magnétique.

Données :  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $R = 0,1 \Omega$ ,  $m = 10 \text{ g}$ ,  $B = 1 \text{ T}$  et  $g \simeq 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$



- 1) À quelle hauteur faut-il lâcher le cadre ABCD, sans vitesse initiale, pour qu'il traverse le mille-feuille à vitesse constante ?
- 2) Tracer alors l'allure de la vitesse du cadre et du courant électrique le traversant en fonction du temps.
- 3) Que deviennent ces courbes si le cadre est équipé d'une diode ne laissant passer le courant électrique que dans un seul sens ?



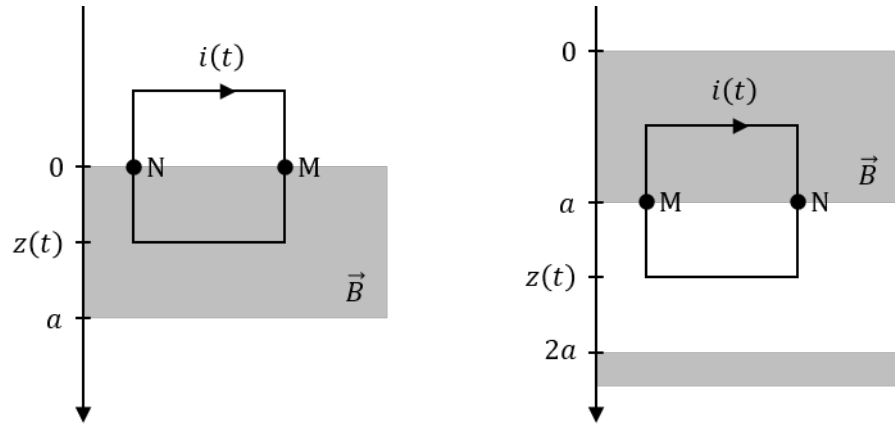
Correction

## Correction

1) On place un axe  $z$  vertical descendant, avec origine à l'entrée du mille-feuille.  
On applique le théorème de l'énergie mécanique sur le cadre entre l'instant initiale ( $z = -h$  et pas de vitesse) et l'entrée du mille-feuille ( $z = 0$  avec une vitesse  $v_1$ ).

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{2gh}}$$

Dans cadre entre ensuite dans la zone de champ magnétique ( $0 < z < a$ ), il subit deux forces : son poids et la force de Laplace.



On oriente la spire dans le sens horaire (figure de gauche). Le flux du champ magnétique vaut :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = -Baz \Rightarrow \boxed{e = Bav = Ri}$$

La force de Laplace vaut :

$$\vec{F}_L = i\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = -iaB = \frac{a^2B^2}{R}v$$

Le principe fondamental de la dynamique sur le cadre (projeté sur  $z$ ) :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{a^2B^2}{R}v \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g} \text{ avec : } \boxed{\tau = \frac{mR}{a^2B^2} = 0,1 \text{ s}}$$

On a une vitesse constante si :

$$\boxed{v(t) = v_1 = g\tau = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

On en déduit la hauteur  $h$  :

$$\boxed{h = \frac{g\tau^2}{2} = 5 \text{ cm}}$$

Une fois le cadre entièrement dans la zone de champ ( $z = a$ ), il en ressort aussitôt (figure de droite). On montre que durant la phase de sortie :

$$\phi = -Ba(2a - z) \Rightarrow \boxed{e = -Bav = Ri} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g}$$

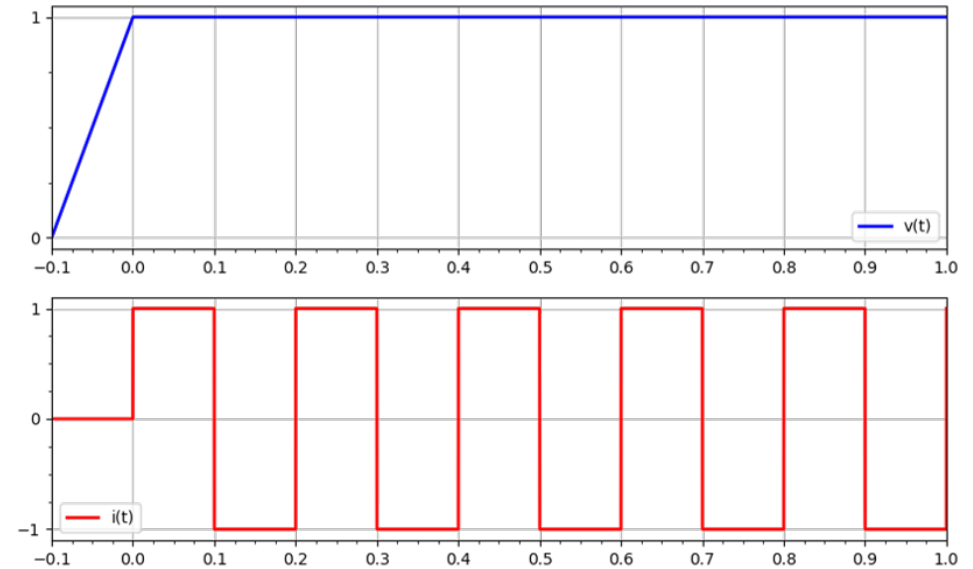
Le courant change de sens mais l'équation différentielle reste inchangée. Le cadre continue à chuter à vitesse constante.

On arrive donc en  $z = 2a$  avec une vitesse  $v_1$ . La situation est identique qu'en  $z = 0$ . On en déduit que le cadre va chute à vitesse constante dans tout le mille-feuille.

2) Dans le mille-feuille :

$$\boxed{v = cte = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} \text{ et } \boxed{i = \pm \frac{aBv}{R} = \pm 1 \text{ A}}$$

On trace ci-dessous  $v(t)$  en bleu et  $i(t)$  en rouge.

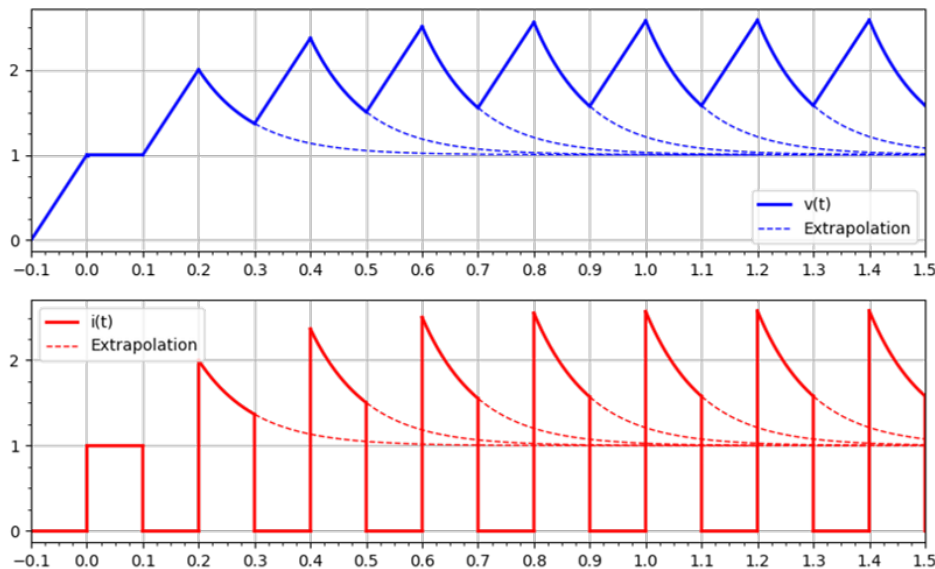


3) Le courant est nul dans les phases où la spire quitte le champ magnétique. Elle va donc se retrouver en chute libre ( $v$  croît linéairement). Arrivée dans la zone de

champ suivante,  $v_i > v_1$  (avec  $v_i$  la vitesse initiale lors de l'entrée dans la zone de champ), il faut alors résoudre l'équation différentielle pour connaître l'évolution de la vitesse qui n'est plus constante.

$$v(t) = (v_i - v_1) e^{-t/\tau} + v_1$$

Remarque : le temps de passage dans chaque feuille est trop court ( $t_{max} = \tau$ ) pour que l'exponentielle atteigne sa valeur finale ( $t > 5\tau$ ). On obtient alors l'allure suivante :



On atteint un régime établi lorsque la chute de vitesse lors de la décroissance exponentielle est égale au gain de vitesse durant la chute libre. Calculons alors la vitesse maximale  $v_{max}$ .

$$v_{max} - v_1 = (v_{max} - v_1) e^{-1} + v_1 \quad \Rightarrow \quad v_{max} = v_1 \frac{2 - e^{-1}}{1 - e^{-1}} \simeq 2,58 v_1$$