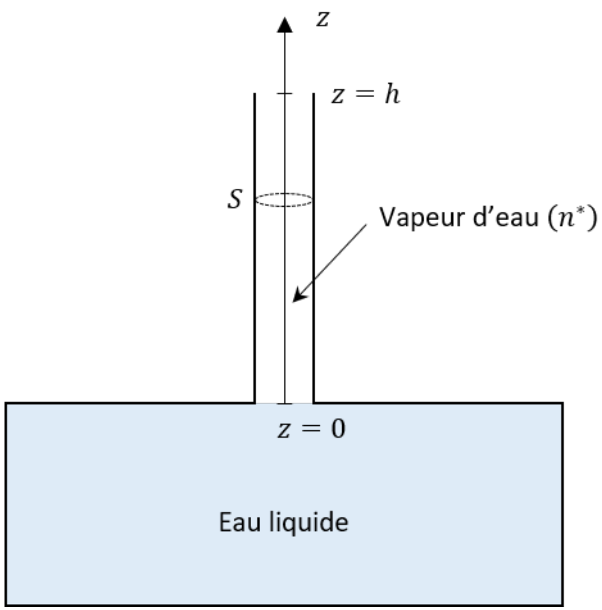
Mesure d'un coefficient de diffusion

Un long tube vertical ouvert aux deux extrémités, de section S, est maintenu sur une cuve à eau (fermée) à température constante T. L'extrémité supérieure du tube est à la hauteur h au-dessus de la surface libre de l'eau. Lors de l'évaporation de l'eau, un courant d'air entretenu au dessus du tube permet d'établir dans le tube un régime stationnaire de diffusion de la vapeur d'eau dont on désigne par D le coefficient de diffusion dans l'air. Cette expérience permet de mesurer D.

On note :

- $\overrightarrow{j} = j(z)\,\overrightarrow{u_z}$ le vecteur densité de courant ;
- $n^* = n^*(z)$ la densité particulaire ;
- P_s la pression de vapeur saturante de l'eau à la température T de l'expérience ;
- $\mathcal{N}_a$ le nombre d'Avogadro ;
- R la constante des gaz parfaits ;
- M la masse molaire de l'eau.



1) Écrire la loi de Fick et expliquer à l'aide de cette loi cette expérience.

2) En supposant qu'en $z = 0$ l'eau liquide est à l'équilibre avec sa vapeur, exprimer $n^*(z=0)$ en fonction de P_s, R, $\mathcal{N}_a$ et T.

Le courant d'air maintenu au dessus du tube permet d'éliminer complètement l'eau évaporée au sommet du tube tout en maintenant l'état stationnaire soit $n^*(z=h) = 0$.

3) Un régime permanent s'établit dans le tube. Montrer, par un bilan de matière sur un système bien choisi que j ne dépend pas de z et en déduire l'expression de $n^*(z)$ dans le tube.

4) Exprimer j et le nombre δN de molécules d'eau qui s'évaporent pendant l'intervalle de temps dt.

5) On pose l'ensemble du dispositif sur une balance et on mesure l'évolution de la masse avec le temps. On note $\dot{m}$ la perte de masse par unité de temps. Exprimer D en fonction de h, R, T, $\dot{m}$, P_s, S et M.

Correction

Correction

1) Loi de Fick :

$$\overrightarrow{j} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}(n^*) \quad \Rightarrow \quad \boxed{j(z) = -D\frac{dn^*}{dz}}$$

L'eau va s'évaporer, ce qui créé une forte concentration en molécule d'eau dans le gaz juste au-dessus de la surface. Il existe donc un gradient de concentration en molécule d'eau le long du tube, ce qui entraîne de la diffusion et donc un mouvement de matière. Connaissant la vitesse d'évaporation de l'eau (en mesurant la masse d'eau), on pourra en déduire la vitesse d'évacuation de la vapeur d'eau par diffusion, et donc le coefficient de diffusion.

2) On assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait :

$$PV = nRT = \frac{NRT}{\mathcal{N}_a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n^*(z=0) = \frac{N}{V} = \frac{P_s\mathcal{N}_a}{RT}}$$

3) Le long du tube, on a une équation de diffusion : on fait un bilan de particule sur

$$PV = nRT = \frac{NRT}{\mathcal{N}_a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n^*(z=0) = \frac{N}{V} = \frac{P_s\mathcal{N}_a}{RT}}$$

On considère une section S comprise entre les abscisses z et $z + dz$. À l'instant t, elle contient :

$$\delta N(x,t) = n^*(x,t)\, Sdx$$

particules. En régime stationnaire, ce nombre de particules est constant :

$$d\,(\delta N) = 0$$

Cette variation est égale à :

- $+$ le nombre de particules reçu par diffusion en z pendant dt ;
- $-$ le nombre de particules cédé par diffusion en $z + dz$ pendant dt.

Ainsi :

$$0 = j(z)\, Sdt - j(z+dz)\, Sdt = -\frac{dj}{dz} Sdzdt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dj}{dz} = 0}$$

On en déduit :

$$\frac{d^2n^*}{dz^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n^*(z) = \frac{P_s\mathcal{N}_a}{RT}\left(1 - \frac{z}{h}\right)}$$

4) On en déduit :

$$\boxed{j = -D\frac{dn^*}{dz} = \frac{P_s\mathcal{N}_a D}{RTh}}$$

De plus,

$$\phi = \frac{\delta N}{dt} = jS \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta N = \frac{P_s\mathcal{N}_a SD}{RTh}\, dt}$$

5) On relie $\dot{m}$ à δN exprimé ci-dessus.

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{\delta N \times M/\mathcal{N}_a}{dt} = \frac{P_s MSD}{RTh}$$

On en déduit :

$$\boxed{D = \frac{RTh\dot{m}}{P_s MS}}$$