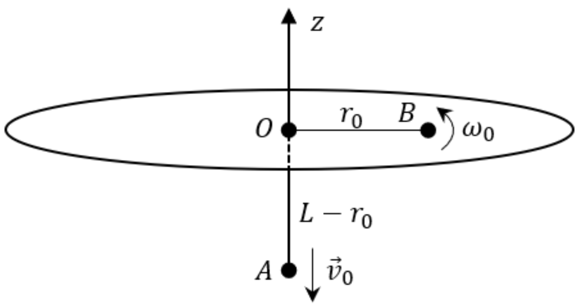
Masse accrochée à une ficelle

Soit un point B libre de se déplacer sur un plan horizontal. On le repère par ces coordonnées polaires (r, θ) et on note $\omega = \dot{\theta}$ sa vitesse angulaire. À l'instant initial, on suppose que $r = r_0 > 0$, $\theta = 0$ et $\omega = \omega_0 > 0$.

Le point B se déplace sans frottement, ce qui a pour conséquence (admise) que le produit $r^2\omega = cte$ est une constante du mouvement.

Le point B est relié au point A par un fil inextensible de longueur L passant par un petit trou en O. À l'instant initial, la distance OA vaut donc $L - r_0$. On suppose que $\forall\, t$, la vitesse du point A est constante et vaut : $\overrightarrow{v}_A = -v_0 \overrightarrow{u}_z$ (avec $v_0 > 0$).



1) Déterminer la relation entre $\dot{r}$ et v_0.

2) Déterminer $r(t)$ puis $\omega(t)$.

3) Déterminer $\theta(t)$ et en déduire le nombre de tour que fait le point B avant d'atteindre le point O.

4) Tracer l'allure de la trajectoire de B.

Correction

Correction

1) La longueur du fil est constante. Ainsi,

$$L = r - z = cte \quad \Rightarrow \quad \dot{r} - \dot{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{r} = -v_0}$$

2) Par intégration, on a immédiatement :

$$\boxed{r(t) = r_0 - v_0 t}$$

Avec la constante du mouvement :

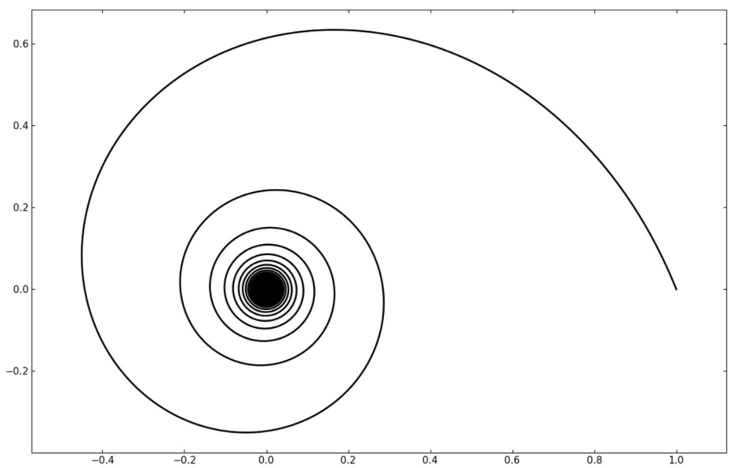
$$r^2\omega = r_0^2\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega(t) = \frac{r_0^2\omega_0}{(r_0 - v_0 t)^2}}$$

3) Par intégration, on a :

$$\boxed{\theta(t) = \frac{r_0^2\omega_0}{v_0}\left(\frac{1}{r_0 - v_0 t} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Le rayon est nul lorsque $t_m = r_0/v_0$. À cet instant, $\theta_m = \infty$. Le nombre de tour est donc infini.

4) Graphe (avec $r_0 = 1$ m, $v_0 = 0,4$ m/s et $\omega_0 = 1$ rad/s) :



Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com