Ligne bifilaire

On considère une ligne bifilaire composée de 2 lignes chargés, parallèles, de longueur infinie, de rayon a et espacés de $2h$ (avec $h \gg a$). Les lignes sont chargées uniquement sur leur surface latérale : on donne σ la densité surfacique de charge.

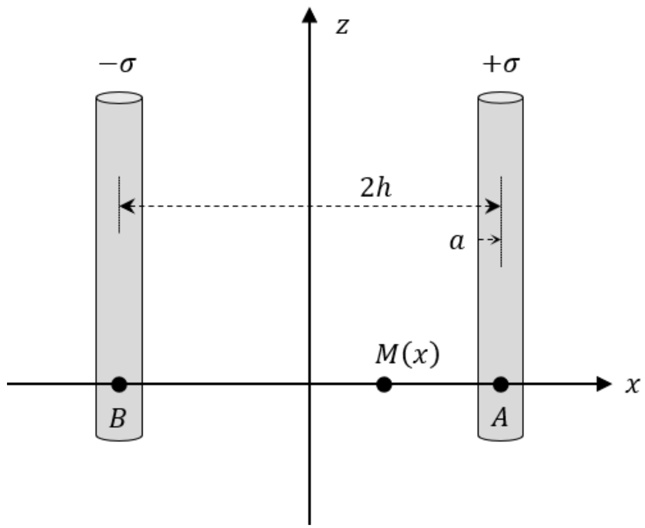
Formulaire : en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial x}\overrightarrow{u}_x + \frac{\partial A}{\partial y}\overrightarrow{u}_y + \frac{\partial A}{\partial z}\overrightarrow{u}_z$$

1) On considère tout d'abord une seule ligne centrée sur (Oz). Exprimer λ, la densité linéique de charge de la ligne, en fonction de σ et a.

2) Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}$ crée par la ligne à l'extérieur ($r > a$), en fonction entre autres de σ.

3) Déterminer le potentiel électrostatique V généré par la ligne à l'extérieur.



On considère à présent les deux lignes. L'une possède une charge linéique $+\sigma$ et l'autre $-\sigma$. On travaillera dans le repère indiqué sur la figure ci-dessus.

4) Déterminer le potentiel électrostatique total V_{tot} créé en un point x tel que $|x| < h - a$.

5) En déduire la différence de potentielle, notée ΔV, entre les surfaces des deux lignes.

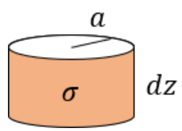
6) Déterminer la capacité par unité de longueur $\mathcal{C}$ de la ligne bifilaire.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1)



Une épaisseur dz de ligne contient la charge :

$$dq = \lambda\, dz = \sigma 2\pi a\, dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \sigma 2\pi a}$$

2) La distribution de charge est invariante par translation selon (Oz) et par rotation autour de l'axe (Oz). Donc : $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}(r)$.
Les plans $(M, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$ et $(M, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_z)$ sont deux plans de symétrie de la distribution de charge. Donc $\overrightarrow{E}$ appartient à l'intersection de ces deux plans. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E(r)\,\overrightarrow{u}_r}$$

On applique le théorème de théorème de Gauss sur un cylindre d'axe (Oz), de longueur L et de rayon $r > a$.

$$\oiint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

Sur les surfaces du dessus et du dessous, $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{dS}$. Il faut donc seulement calculer le flux sur la surface latérale du cylindre. Puisque l'intégrale porte sur les variables θ et z, le champ $\overrightarrow{E}(r)$ est constant et peut sortir de l'intégrale. Ainsi :

$$E(r) \times S = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \quad \text{avec :} \quad S = 2\pi r L \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(r) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r}}$$

3) Avec le formulaire et ce qui précède, on a :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r} = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(r) = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln(r)}$$

en choisissant la constant d'intégration nulle.
4) On note V_+ et V_- les potentiels créés par les lignes de charge respectivement $+\sigma$ et $-\sigma$. Puis le r de la formule précédente représente la distance entre le point M et le centre de la ligne, on a :

$$V_{tot}(M) = V_+(M) + V_-(M) = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln(AM) + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln(BM)$$

Avec le nouveau système de coordonnées et pour $|x| < h - a$, on a :

$$V_{tot}(x) = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln(h - x) + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln(h + x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{tot}(x) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{h + x}{h - x}\right)}$$

5) Par définition,

$$\Delta V = V_{tot}(h - a) - V_{tot}(-h + a) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{2h - a}{a}\right) - \ln\left(\frac{a}{2h - a}\right)\right]$$

Avec $h \gg a$, on a finalement :

$$\boxed{\Delta V = \frac{2\sigma a}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{2h}{a}\right)}$$

6)On rappelle la relation entre q, C et ΔV pour un condensateur.

$$q = C\,\Delta V$$

Soit une portion dz de ligne. On a :

$$\lambda\, dz = \delta C \times \frac{2\sigma a}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{2h}{a}\right)$$

On en déduit la capacité linéique de la ligne :

$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{\delta C}{dz} = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln(2h/a)}}$$