Lemniscate

On considère la courbe plane dont l'équation cartésienne est donnée par :

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$$

avec a une constante positive.

1) Justifier que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées.

En conséquence, il est possible d'étudier la courbe seulement pour $x>0$ et $y>0$. Le reste s'en déduit par symétrie.

2) Quelle est la plage de θ correspondante, notée $\mathcal{D}$? Déterminer l'équation polaire $r(\theta)$ dans $\mathcal{D}$.

3) On pose : $\theta=\omega t$ avec $\omega=cte$. Déterminer les vecteurs position et vitesse dans la base polaire dans $\mathcal{D}$.

4) Déterminer l'angle θ de $\mathcal{D}$ où la vitesse est uniquement selon $\overrightarrow{u}_x$. Déterminer l'équation que doit satisfaire l'angle θ de $\mathcal{D}$ pour que la vitesse soit uniquement selon $\overrightarrow{u}_y$ (on ne cherchera pas à résoudre cette équation).

5) Représenter la courbe.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Soit (x, y) un point de la courbe. Alors $(-x, y)$, $(x, -y)$ et $(-x, -y)$ sont aussi des points de la courbe.

2) Cela correspond au cas où $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

On rappelle que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Ainsi :

$$r^4 = r^2 a^2 \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r^2 = a^2\cos(2\theta)}$$

On remarque que si $\cos(2\theta) < 0$, alors il n'existe pas de solution. C'est le cas pour $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$. En revanche, pour $0 \leq \theta \leq \pi/4$, on a :

$$\boxed{r = a\sqrt{\cos(2\theta)}}$$

3) Pour $0 \leq \theta \leq \pi/4$, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= a\sqrt{\cos(2\omega t)}\,\overrightarrow{u_r} \\
\overrightarrow{v} &= -a\omega\frac{\sin(2\omega t)}{\sqrt{\cos(2\omega t)}}\overrightarrow{u_r} + a\omega\sqrt{\cos(2\theta)}\,\overrightarrow{u_\theta}
\end{aligned}$$

4) Exprimons $\overrightarrow{v}$ dans la base cartésienne.

$$\begin{cases}
\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y} \\
\overrightarrow{u_\theta} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x}
\end{cases}$$

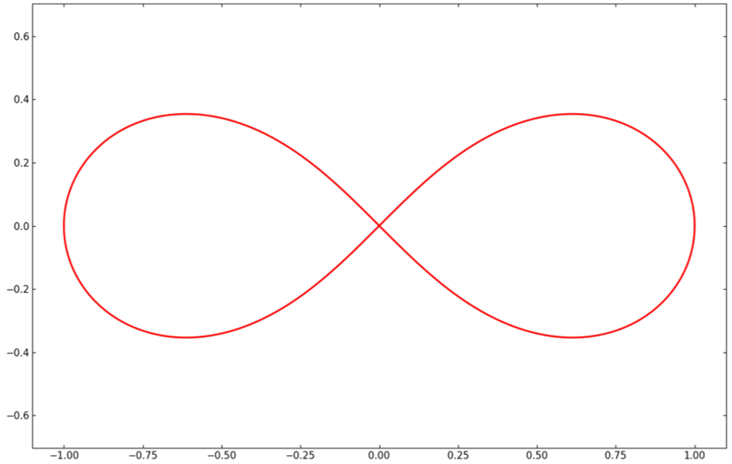
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} = &\left[-a\omega\frac{\sin(2\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} - a\omega\sin(\theta)\sqrt{\cos(2\theta)}\right]\overrightarrow{u_x} \\
&+ \left[-a\omega\frac{\sin(2\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} + a\omega\cos(\theta)\sqrt{\cos(2\theta)}\right]\overrightarrow{u_y}
\end{aligned}$$

La vitesse v_x s'annule pour $\boxed{\theta = 0}$. La vitesse v_y s'annule pour :

$$\frac{\sin(2\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = \cos(\theta)\sqrt{\cos(2\theta)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan(2\theta)\tan(\theta) = 1}$$

5) Graphe :



Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com