Interférences et tâche centrale de diffraction

On prend deux trous d'Young séparés d'une distance a dans la direction x. On envoie sur le dispositif une onde monochromatique de longueur d'onde λ et on observe la figure d'interférence à une distance $D \gg a$.

1) Déterminer l'expression de la différence de marche δ en un point M de l'écran entre les deux rayons en fonction de a, x et D.

2) On note O le milieu des deux trous et θ l'angle entre OM et l'axe optique du dispositif. Exprimer δ en fonction entre autres de θ. On se placera dans l'approximation des petits angles.

On étudie à présent la diffraction d'une onde de longueur d'onde λ en incidence normale sur une fente infiniment large selon la dimension y et de largeur a selon x. On cherche à retrouver l'expression de la demi-largeur angulaire du cône de diffraction, notée α. On modélise pour cela la fente par un ensemble de sources ponctuelles.

3) Déterminer la différence de marche à l'infini (ie. $D \to \infty$) entre la source au centre de la fente et une source du bord, dans une direction θ quelconque.

4) En déduire l'expression du premier l'angle α pour lequel les interférences entre ces deux sources de la fente sont destructives. Conclure.

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Détermination de la différence de marche δ.

$$\delta = (O_2M) - (O_1M)$$

avec :

$$\begin{aligned}(O_2M) &= \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}\\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2}\\ &\simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right]\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}(O_1M) &= \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}\\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2}\\ &\simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right]\end{aligned}$$

Après simplification :

$$\boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

Ainsi :

$$\boxed{I(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)\right)}$$

2) On a :

$$\tan(\theta) \simeq \theta = \frac{x}{D} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = a\theta}$$

3) Prenons le bords du haut, noté O_1. On a :

$$\delta = (OM) - (O_1M)$$

avec :

$$(OM) = \sqrt{x^2+y^2+D^2} \simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right]$$

et :

$$(O_1M) = \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right]$$

Après simplification :

$$\delta = \frac{ax}{2D} - \underbrace{\frac{(a/2)^2}{2D}}_{\text{ordre 2}} \simeq \frac{ax}{2D} = \boxed{\frac{a\theta}{2}}$$

Par définition de la première interférence destructive, α est défini par :

$$\frac{a\alpha}{2} = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\lambda}{a}}$$